Министерство образования и науки Российской федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования «Новосибирский национальный
исследовательский государственный университет»

УДК 512

№ госрегистрации 01201002173

Инв. №

УТВЕРЖДАЮ
Ректор
д.х.н., профессор
______________ В. А. Собянин
«___» ноября 2011 г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

В рамках федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы

по Государственному контракту от 12 марта 2010 г. № 02.740.11.5191
с дополнительными соглашениями от 28 июля 2010 г. № 1
от «14» октября 2011 г. № 2
Шифр заявки «2010-1.5-503-007-003»
по теме:

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ СОВРЕМЕННОЙ АЛГЕБРЫ

Наименование этапа: «Проведение исследований»

(итоговый, этап № 3)

Руководитель темы ___________________ И.П. Шестаков

подпись, дата

Новосибирск 2011

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель темы, проф., д.ф.-м.н.	________________	И. П. Шестаков (раздел 3)
Зам. руководителя темы Ассистент НГУ, к.ф.-м.н.	________________	И. Б. Кайгородов (раздел 1, раздел 2)
Исполнители темы		
Проф. НГУ, д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН	________________	В. Д. Мазуров (раздел 2)
Проф. НГУ, д.ф.-м.н.	________________	Л. А. Бокуть (раздел 1)
Проф. НГУ, д.ф.-м.н.	________________	Н. С. Романовский (раздел 1)
Доцент НГУ, д.ф.-м.н.	________________	В. Г. Бардаков (раздел 1)
Доцент НГУ, к.ф.-м.н.	________________	П. С. Колесников (раздел 1, раздел 2)
Доцент НГУ, д.ф.-м.н.	________________	В. Н. Желябин (раздел 1, раздел 2)
Доцент НГУ, д.ф.-м.н.	________________	Д. О. Ревин (раздел 2)
Доцент НГУ, к.ф.-м.н.	________________	А. П. Пожидаев (раздел 1, , раздел 2)
Стар. Преп. НГУ, к.ф.-м.н.	________________	М. А. Гречкосеева (раздел 3)
Стар. Преп. НГУ, к.ф.-м.н.	________________	И. А. Долгунцева (раздел 2)
Ассистент НГУ, к.ф.-м.н.	________________	А. С. Мамонтов (раздел 1, раздел 2, подготовка, введение, заключение)
Ассистент НГУ, к.ф.-м.н.	________________	М. Е. Гончаров (раздел 1, раздел 2, раздел 3)
Преподаватель СУНЦ НГУ, к.ф.-м.н.	________________	А. А. Гальт (раздел 3)

Аспирант ИМ СО РАН	________________	А. А. Попов (раздел 1)
Аспирант ИМ СО РАН	________________	А. М. Старолетов (раздел 1)
Аспирант НГУ		Н. Ч. Манзаева (раздел 1)
Студент НГУ	________________	В. Ю. Губарев (раздел 1)
Студент НГУ	________________	В. Ю. Воронин (раздел 3)
Студент НГУ	________________	Е. М. Охапкина (раздел 1)
Студент НГУ	________________	И.А. Хохлова (раздел 1)
Студент НГУ	________________	Ю. С. Попов (раздел 1)
Студент НГУ	________________	Т. И. Шабалин (раздел 2)
Студент НГУ	________________	Р. И. Басыров (раздел 3)
Нормоконтролер	________________	Л. И. Кашникова

РЕФЕРАТ

Отчет 71 с., 3 прил.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: АЛГЕБРА ФИЛИППОВА; АЛГЕБРА МАЛЬЦЕВА; СТРУКТУРИЗУЕМАЯ АЛГЕБРА; N-АРНАЯ АЛГЕБРА; БИАЛГЕБРА.

В рамках исследований изучались фундаментальные задачи в теории неассоциативных алгебр и супералгебр, а также других разделов современной алгебры.

В рамках выполнения НИР проводились фундаментальные исследования в современной алгебре. Основной целью являлось получение высокоуровневых научных результатов, успешное взаимодействие с приглашенным исследователем проф. д.ф.-м.н. И. П. Шестаковым, подготовка и закрепление в сфере науки и образования научных и научно-педагогических кадров.

Частными целями проведения работ являются:

Изучение фундаментальных проблем современной алгебры, выявление глубоких взаимосвязей между различными областями современной алгебры. Привлечение студентов и аспирантов к научно-исследовательской работе. Воспитание математической культуры и необходимой интуиции и эрудиции в вопросах приложения математики у студентов и аспирантов.

В ходе выполнения 3 этапа получены следующие результаты:

исследована возможность представления жестких разрешимых групп через определяющие соотношения;

описаны (n+1)-дифференцирования полупростых алгебр Филиппова и простой тернарной алгебры Мальцева M_8;

описаны дифференциально простые йордановы алгебры;
найдены тождества тернарной алгебры кватернионов;
описаны δ-дифференцирования полупростых структуризумых алгебр;
построен пример новой простой йордановой супералгебры над полем не являющимся алгебраически замкнутым;
доказана лемма о композиции для алгебр Ли над коммутативным кольцом;
построен ряд новых примеров неспециальных алгебр Ли;
доказана в общем случае двойственность в смысле Кожуля для категорий ди-(три-)алгебр и дендриформных алгебр;
разработан вычислительный алгоритм нахождения белого произведения Манина для бинарных квадратичных операд;
классифицированы градуированные простые ассоциативные конформные алгебры конечного типа.

В результате исследований получены новые результаты мирового уровня, которые вошли в докторские и кандидатские диссертации, а также в дипломные и курсовые работы, и магистерские диссертации исполнителей, доложены на международных научных конференция, опубликованы в высокорейтинговых статьях и внедряются в учебный процесс Новосибирского государственного университета.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Выполнение НИР направлено на проведение фундаментальных исследований в области современной алгебры, с целью получения научных результатов мирового уровня, на подготовку и закрепление в сфере науки и образования научных и научно-педагогических кадров, а также формирование эффективных и жизнеспособных научных коллективов и успешное взаимодействие с известным ученым проф., д.ф.-м.н. И. П. Шестаковым.

В состав разрабатываемой научной продукции входят математические модели задач; алгоритмы и методы решения поставленных задач; публикации результатов исследований в отечественных и зарубежных изданиях; диссертации; отчет о НИР, содержащий обоснование развиваемых направлений исследований, изложение методик проведения исследований, а также описание полученных результатов.

Как уже отмечено выше, результаты исследований носят фундаментальный характер, могут быть востребованы во многих сферах научной деятельности. Например, при проведении современных исследований в области теории колец, в частности, в теории n-арных алгебр, теории биалгебр, супералгебр, комформных алгебр, математической физике и в других областях.

Результаты исследований вошли в диссертации, курсовые и дипломные работы исполнителей.

Результаты НИР внедряются в образовательный процесс: при чтении математических спецкурсов для студентов старших курсов; при проведении курсов повышения квалификации молодых преподавателей НГУ и проведении специальных семинаров по современным разделам математики в Новосибирском Государственном университете.

Результаты подтверждены публикациями в реферируемых журналах по математике, а также выступлениями на российских и международных конференциях по тематике НИР.

В ходе выполнения третьего этапа получены новые фундаментальные результаты, найдены новые подходы, разработаны новые алгоритмы, найдены новые приложения, опубликованы новые научные статьи, защищены курсовые работы, и осуществляется внедрение результатов в учебный процесс НГУ.

1.1. Решение рассматриваемых задач

История изучения обобщений дифференцирований исходит к середине 20 века. В свое время многими математиками предпринимались различные попытки изучения обобщений дифференцирований. Так, И. Херстейном [1], Дж. Кусаком [2] и М. Брешаром [3,4] изучались йордановы дифференцирования; В. Мардиндейлом [5], Е. Килламом [6], К. Бейдаром и М. Чеботаром [7] изучались лиевы дифференцирования; Д. Бурде [8], И. Баджо [9,10] изучались предифференцирования; Дж. Хохшильд [11], Э. Винберг [12], Б. Хвала [13], Т. Ли [14] изучали обобщенные дифференцирования. Одним из обобщений обыкновенных дифференцирований является понятие δ-дифференцирования. Под δ-дифференцированием бинарной алгебры понимают обобщение обыкновенного дифференцирования, то есть такое линейное отображение u удовлетворяющее условию $u(xy)=\delta(u(x)y+xu(y))$ при произвольных элементах алгебры x и y. История изучения δ-дифференцирований восодит к работам Н. Джекобсона (см. [15]), где появляется понятие антидифференцирования, также известного как (-1)-дифференцирование. В дальнейшем, изучение антидифференцирований было продолжено Н. Хопкинс и Р. Браун [16,17], а также, В. Т. Филипповым [18]. Само понятие δ-дифференцирования возникает в работах В.Т. Филиппова [19,20,21], где изучались δ-дифференцирования первичных лиевых, альтернативных и мальцевских алгебр. В частности, было показано, что первичные альтернативные алгебры и алгебры Мальцева не имеют нетривиальных δ-дифференцирований. Для алгебр Ли изучение δ-дифференцирований дало другие результаты, а именно, было показано, что первичные алгебры Ли, обладающие билинейноей инвариантной симметрической невырожденной формой могут иметь нетривиальные δ-дифференцирования только при $\delta=-1$, то есть антидифференцирования. В тоже время, им была описана струтура всех первичных алгебр Ли, обладащих нетривиальными антидифференцированиями. В случае алгебр Ли не обладающих билинейной формой с заданными свойствами, им были приведены примеры нетривиальных, то есть отличных от элементов центроида алгебры, 1/2-дифференцирований для простой бесконечномерной алгебры Витта W1. Изучение δ-дифференцирований различных многообразий алгебр и супералгебр было продолжено И. Б. Кайгородовым. Им были изучены δ-дифференцирования полупростых конечнмерных йордановых супералгебр [22], простых конечномерных йордановых, некоммутативных йордановых, а также лиевых супералгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль [23,24]. Им было показано, что данные классы алгебр и супералгебр не имеют нетривиальных δ-дифференцирований. В. Н. Желябин и И. Б. Кайгородов описали δ-дифференцирования простых супералгебр йордановой скобки. Тамже, ими были приведены примеры нетривиальных 1/2-дифференцирований для супералгебр векторного типа, а также была установлена связь между существовнием нетривиальных 1/2-дифференцирований простой супералгебры йордановых скобок и ее специальностью. В результате, в работе [26] была завершена классификация нетривиальных δ-дифференцирований полупростых конечномерных йордановых супералгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики отличной от 2. Были построены новые примеры нетривиальных 1/2-дифференцирований простых неунитальных йордановых супералгебр, отличных от элементов правого умножения на элемент данной супералгебры. Также, была доказана

Теорема. Любая полупростая конечномерная йорданова супералгебра над алгебраически замкнутым полем характеристики отличной от 2, обладающая нетривиальным δ-дифференцированием представима в виде прямой суммы супералгебры не имеющей нетривиальных δ-дифференцирований и супералгебры, являющейся прямой суммой супералгебр векторного типа. При этом, все нетривиальные δ-дифференцирования данной полупростой супералгебр исчерпываются 1/2-дифференцированиями.

Класс структуризуемых алгебр был введен в 1978 году Б. Н. Аллисоном (см. [27]). Данный класс алгебр представляет интерес в связи с тем, что в него попадают такие объекты, как: тензорное произведение композиционных алгебр, 56-мерный модуль Фрейденталя над E_7 с естественной бинарной операцией, 35-мерная алгебра T(C); в нем имеет естественное обобщение конструкция Кантора-Кёхера-Титса. В Структуризуемые алгебры - это алгебры с единицей, которую обычно обозначают e и инволюцией r , удовлетворяющие тождеству

$$[T_z,V_{x,y}]=V_{T\_zx,y} — V_{x,T\_r(z)y},$$

где T_z, $V_{x,y}$ эндоморфизмы алгебры A и $V_{x,y}(z)=(xr(y))z+(zr(y))x-(zr(x))y$, $T_z=V_{z,1}$ для произвольных элементов x,y,z алгебры A. Любая структуризуемая алгебра распадается в прямую сумму двух векторных пространств. Первое из них состоит из элементов инвариантов относительно инволюции, второе состоит из элементов, где инволюция действует как оператор умножения на -1. Интерес к изучению структуризумых алгебр и супералгебр постоянно присутствует в математической среде (к примеру, в работах [28,29,30] была построена структурная теория простых конечномерных супералгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль). В тоже время, структурная теория полупростых структуризуемых алгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики отличной от 2,3 и 5 была построена в работах О. Смирнова [31,32]. В данных работах была исправлена ошибки, допушенные в предыдушей классификации простых конечномерных структуризуемых алгебр [33], в результате чего была найдена простая 35-мерная структуризуемая алгебра T(C), получаемая из алгебра простой 7-мерной неливой алгебры Мальцева M_7. Таким образом, простые конечномерные структуризуемые алгебры исчерпываются ассоциативными алгебрами с инволюцией, йордановыми алгебрами с тривиальной инволюцией, алгеброй тензорного произведения композиционных алгебр с индуцированной инволюцией, алгеброй допустимых троек, алгеброй эрмитовой формы и 35-мерной простой алгеброй Смирнова T(C). В тоже время, каждая полупростая конечномерная структуризуемая алгебра над алгебраически замкнутым полем характеристики отличной от 2, 3 и 5 распадается в прямую сумму простых конечномерных структуризуемых алгебр. Данная классификация была использована при изучении δ-дифференцирований полупростых структуризуемых алгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики отличной от 2, 3 и 5.

В результате, в рамках выполнения государственного контракта, Е. М. Охапкиной и И. Б. Кайгородовым была доказана

Теорема. Полупростая конечномерная структуризуемая алгебра над алгебраически замкнутым полем характеристики отличной от 2, 3 и 5 не имеет нетривиальных δ-дифференцирований.

Отметим, что в работе [34] было определено понятие обобщенного δ-дифференцирования, то есть такого линейного отображения w, связанного с δ-дифференцированием u, что для произвольных элементов x,y алгебры A верны равенства $w(xy)= \delta(w(x)y+xu(y))= \delta(xw(y)+u(x)y)$. Там же было показано, что обобщенные δ-дифференцирования унитальных алгебр исчерпываются обобщенными дифференцированиями (т.е. обобщенными 1-дифференцирования) и δ-дифференцированиями. Таким образом, из полученной теоремы и замеченных следствий, вытекает теорема, полученная в рамках выполнения государственного контракта молодыми исполнителями контакта Е. М. Охапкиной и И. Б. Кайгородовым:

Теорема. Обобщенное δ-дифференцирование полупростой конечномерной структуризуемой алгебры над алгебраически замкнутым полем характеристики отличной от 2, 3 и 5 представимо в виде суммы дифференцирования и элемента центроида.

Учитывая то, что структуризуемые алгебры (соответственно, супералгебр) являются обобщением класса унитальных йордановых алгебр (соответственно, супералгебр), а также то, что в работах [22,24,25] были описаны δ-дифференцирования простых конечномерных унитальных йордановых супералгебр над алгебраически замкнутым полем и тот факт, что недавно была получена структурная теория простых конечномерных структуризуемых супералгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль (см. [28,29,30]), естественно напрашивается вывод о продолжении исследований в области описания δ-дифференцирований простых конечномерных структуризуемых супералгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль.

Другой способ обобщения дифференцирований появился в работе Е. Лакса и Г. Леджера [35], где они рассматривали квазидифференцирования и обобщенные дифференцирования алгебр Ли, в частности, ими были описаны все алгебры Ли, обладающие свойством, что каждый эндоморфизм является обобщенным дифференцированием. Как оказалось, эти алгебры исчерпываются простой трехмерной алгеброй sl_2 и алгебрами размерности меньше 3. В дальнейшем, эти результаты были обобщены в работе [36], где изучались квазидифференцирования и обобщенные дифференцирования супералгебр Ли, в частности были описаны супералгебры Ли, обладающие свойством, что любой эндоморфизм является обобщенным дифференцированием. Данный результат оказался аналогичен ранее доказанному для алгебр Ли. Оказалось, что все такие супералгебры исчерпываются простой трехмерной алгеброй Ли sl_2 и супералгебрами размерности менее 3. Отметим, что обобщенным дифференцированием мы называем линейное отображение F, связанное с двумя другими линейными отображениям E и G следующим соотношением $F(xy)=E(x)y+xG(y)$ для произвольных элементов x и y из алгебры A. В данных обозначениях, тройка (F,E,G) называется тернарным дифференцированием. В случае ассоциативных алгебр, обобщенные дифференцирования рассматривались в работе [37], где для унитальных ассоциативных алгебр была показана эквивалентность обобщенных дифференцирований в данном смысле и обобщенных дифференцирований в терминах работы [13]. Также, в [37] были описаны обобщенные дифференцирования матричных алгебр, построенных на унитальных ассоциативных алгебрах. В дальнейшем, в работе [38] изучались унитальные ассоциативные алгебры, допускающие обратимые обобщенные дифференцирования, то есть такие обобщенные дифференцирования ненулевые значения которых являются обратимыми элементами. Как оказалось, все такие алгебры исчерпываются алгебрами с делением, алгеброй матриц 2 на 2 над алгеброй с делением, либо представимы в виде прямой суммы алгебры с делением и нильпотентного идеала специально вида. Данный результат был обобщением теоремы Дж. Бергмана, И. Херстейна и Ч. Лански о обратимых дифференцированиях унитальных ассоциативных алгебр (см. [39]). В рамках исследований проводимых по государственному контракту, данный результат был обобщен на случай альтернативных алгебр. А именно, Ю. С. Поповым была доказана

Теорема. Неассоциативная альтернативная алгебра над полем характеристики отличной от 2, 3, допускающая обратимое дифференцирование, является алгеброй Кэли-Диксона.

Исследованиям тернарных дифференцирований унитальных алгебр посвящены работы [40,41,42]. В частности, в [40] изучались тернарные дифференцирования алгебр, полученных по обобщенному процессу Кэли-Диксона. В действительности, при применении процесса Кэли-Диксона к основному полю, мы можем получить ассоциативные алгебры размерности 1, 2 и 4, альтернативную алгебру, так называемую алгебру Кэли-Диксона, размерности 8, и семейство неальтернативных алгебр размерности 2^t, $t>3$. В данной работе было показано, что в каждой неассоциативной алгебре, построеной по процессу Кэли-Диксона любое тернарное дифференцирование конструируется из операторов правого и левого умножения на элементы альтернативного центра. В работе [42] были описаны унитальные алгебры, удовлетворяющие принципу локальной тройственности, а также некоторым специальным условиям.

Идея целесообразности обобщения бинарных алгебр в отношении повышения арности операции умножения появлялась еще у А. Куроша. В дальнейшем, n-арные алгебры появлялись в работах разных математиков, к примеру в работе [43] были введены так назывемые n-лиевы алгебры, получившие в дальнейшем названием алгебр Филиппова, как обобщение алгебр Ли в смысле повышения арности операции. Особый интерес алгебры Филиппова представляют в связи с недавно выявленной связью между ними и математической физикой, в частности с механикой Намбу (см. [44]) и теорией Черна-Симонса (подробнее об этом см. в обзоре [45]). Алгеброй Филиппова называется алгебра L с одной антикоммутативной n-арной операцией $[x_1,..., x_n]$, удовлетворяющей тождеству

$$[[x_1,...,x_n],y_2,...,y_n] = \sum[x_1,...,[x_i,y_2,...,y_n],...,x_n].$$

Отметим, что хорошо известным обобщением алгебр Ли являются алгебры Мальцева. В свою очередь, n-арные алгебры Мальцева являются одновременно обобщением алгебр Филиппова и алгебр Мальцева. n-Арные алгебры Мальцева впервые появляются в работе А. П. Пожидаева в 2001 г. Под n-арной алгеброй Мальцева мы понимаем алгебру с антикоммутативным n-арным умножением, которое удовлетворяет соотношению

$$-J(zR_x,x_2,...,x_n;y_2,...,y_n) = J(z, x_2,...,x_n;y_2,...,y_n)R_x, \text{ где}$$

$R_x = R_{x2,...,xn}$ - оператор правого умножения: $zR_x = [z,x_2,...,x_n]$, а

$$J(x_1,...,x_n;y_2,...,y_n) =[[x_1,...,x_n],y_2,...,y_n] - \sum [x_1,...,[x_i,y_2,...,y_n],...,x_n] \text{ – якобиан.}$$

Из определения следует, что если A - n-арная алгебра Филиппова, то $J(x_1,...,x_n;y_2,...,y_n) = 0$ для всех $x_1,...,x_n,y_2,...,y_n \in$ A. Основным примером n-арной алгебры Мальцева, не являющейся алгеброй Филиппова является тернарная алгебра Мальцева M_8, получаемая из алгебры Кэли-Диксона C, путем введения на векторном пространстве C нового умножения $[x, y, z] = xyz - (y, z)x + (x, z)y - (x, y)z$. Естественным обобщением тернарного дифференцирования на случай n-арной алгебря является (n+1)-арное дифференцирование, то есть набор линейных отображений $(f_0,f_1,\ldots,f_n)$, что при произвольных элементах $x_1,\ldots,x_n$ из алгербы A выполнено условие

$$f_0[x_1,\ldots,x_n]=[f_1(x_1),\ldots,x_n]+\ldots+[x_1,\ldots, f_n(x_n)].$$

Отметим, что структурная теория полупростых конечномерных алгебр Филиппова над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль была построена В. Лингом в его диссертации, но в тоже время, до сих пор не существует классификации простых конечномерных модулярных алгебр Филиппова, а также простых бесконечномерных алгебр Филиппова даже в случае алгебраически замкнутого поля. Для n-арных алгебр Мальцева до сих пор не построена даже структурная теория простых конечномерных алгебр над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Более того, тернарная алгебра Мальцева M_8 является единственным на данный момент известным примером простой n-арной алгебры Мальцева не являющейся алгеброй Филиппова.

Используя методы, разработанные А. П. Пожидаевым при изучении дифференцирований тернарной алгебры M_8, рамках данной работы, И. Б. Кайгородовым были описаны 4-арные дифференцирования простой 8-мерной тернарной алгебры Мальцева M_8, а именно, в рамках выполнения государственного контракта, была показана

Теорема. Пусть (H,E,F,G) – 4-арное дифференцирование тернарной алгебры Мальцева M_8, тогда (H,E,F,G)= (D,D,D,D)+((a+b+c)id, a id,b id, c id), где D – некоторое дифференцирование тернарной алгебры M_8, а элементы a,b,c – скаляры из основного поля.

Также, были описаны тернарные дифференцирования простых нелиевых алгебр Мальцева, а именно, в рамках выполнения государственного контракта, была доказана

Теорема. Пусть (H,E,F) – тернарное дифференцирование простой нелиевой алгебры Мальцева A над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль,

тогда (H,E,F)=(D,D,D)+((a+b)id,a id,b id), где D – некоторое дифференцирование алгебры A, а элементы a,b – скаляры из основного поля.
Далее, тернарные дифференцирования вида (D,D,D) и ((a+b)id,a id,b id) будем называть тривиальными. Из данной теоремы, используя хорошо известные результаты о существовании ненулевых антидифференцирований простых алгебр Ли, получается

Теорема. Существуют полупростые нелиевы алгебры Мальцева допускающие тернарные дифференцирования не представимые в виде суммы тривиальных дифференцирований.

В тоже время, используя структурную теорию простых конечномерных алгебр Филиппова над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль, мы можем получить полное описание (n+1)-арных дифференцирований данного класса алгебр. Результатом данных исследований является теорема, полученная И. Б. Кайгородовым в рамках выполнения государственного контракта:

Теорема. Пусть $(f_0, f_1,..., f_n)$ - (n+1)-арное дифференцирование простой конечномерной n-арной алгебры Филиппова над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль, тогда

$$(f_0, f_1,..., f_n) = (\sum h_j\cdot id, h_1\cdot id,...,h_n\cdot id) + (d_0,d,...,d)$$

и $[d_0]^T + [d] = 0$, где $[d_0]$, $[d]$ - матрицы линейных отображений d_0, d.

Как вытекает из данной теоремы, любой эндоморфизм простой конечномерной алгебры Филиппова над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль является обобщенным дифференцированием. В тоже время, используя классификацию полупростых конечномерных алгебр Филиппова над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль, полученную в работе В. Линга, мы можем дать полную классификацию (n+1)-арных дифференцирований алгебр данного класса и, в частности, доказать, что полупростые алгебры из данного класса, не являющиеся простыми, обладают эндоморфизмами, которые не являются обобщенными дифференцированиями. Полученные результаты, в совокупности с известными результатами Е. Лакса, Г. Лежера, Р. Жанга и Я. Жанга (см. [35,36]), дают возмомжность сформулировть следующую гипотезу

Гипотеза. Если n-арная алгебра Филиппова облает свойством, что каждый ее эндоморфизм является обобщенным дифференцированием, то либо ее размерность не превосходит n, либо она является простой (n+1)-мерной алгеброй A_{n+1}.

Естественным продолжением проведенных исследований является изучение данной гипотезы.

Как уже отмечалось, алгебры Филиппова имеют широкое примение в современных иследованиях по математической физике. Для каждой конкретной алгебры вопрос нахождения полного набора ее определяющих тождеств является важным и актуалным. К примеру, в 2010 участником проекта И. П. Шестаковым были выялены тождества 8-мерной альтернативной алгебры Кэли-Диксона. Для тернарных алгебр Филиппова вопрос определения ее тождеств был инициирован и исследовался в работе участника проекта А. П. Пожидаева с соавторами. Ими были установлены тождества тернарной алгебры кватернионов, являющимся естественным обобщением трехмерной простой алгебры Ли sl_2 на случай повышения арности операции.

Н. С. Романовским исследовалась возможность представления жестких разрешимых групп через определяющие соотношения. Ниже будут сформулированы основные результаты, полученные в рамках исследований по государственному контракту. В соответствии с работой [46] группа G называется m-жесткой, если в ней существует нормальный ряд

$$G = G_1 > G_2 > \ldots > G_m > G_{m+1} = 1 \qquad (1)$$

с абелевыми факторами, каждый из которых G_i/G_{i+1}, рассматриваемый как правый $Z[G/G_i]$-модуль, не имеет модульного кручения. Жесткой группой называется группа, m-жесткая для некоторого m. Важными примерами жестких групп являются свободные разрешимые группы, в них соответствующими рядами будут ряды коммутантов. В [46] доказано, что если ряд с указанными свойствами вообще существует, то он определяется группой однозначно, при этом ступень разрешимости G в точности равна m. Принципиальным фактом о жестких группах является теорема, утверждающая, что произвольная жесткая группа нетерова по уравнениям, то есть всякая система уравнений от конечного числа переменных над рассматриваемой группой эквивалентна некоторой своей конечной подсистеме [47]. Это дало возможность развить алгебраическую геометрию над жесткими группами в работах [48,49,50]. Подгруппа H жесткой группы G также является жесткой, соответствующий ряд получается пересечением H с рядом (1) и выбрасыванием повторений. Назовем нормальную подгруппу H идеалом в G, если и фактор-группа G/H будет жесткой. В рамках выпонения работ по государственному контракту, Н.С. Романовским была получена

ТЕОРЕМА 1. В m-жесткой группе, порожденной n элементами, длина любой строго возрастающей (убывающей) цепочки идеалов ограничена функцией, зависящей от m и n.

Обозначим через Σ_m класс всех жестких групп ступени $\leq$m. Понятно, что всякая n-порожденная группа из Σ_m является фактор-группой свободной разрешимой группы $F_{m,n}$ ступени m с базой $\{x_1, \dots ,x_n \}$ по некоторому идеалу. Рассмотрим вопрос о возможности задания группы в классе Σ_m через определяющие соотношения. Пусть $R = R(x_1,\dots, x_n)$ -некоторое множество групповых слов от $x_1, \dots , x_n$. В классической ситуации группа, $\langle x_1 ,\dots, x_n \mid R\rangle$ имеющая представление 1 является фактор-группой соответствующей свободной группы по наименьшей нормальной подгруппе, содержащей R. В нашем случае в свободной разрешимой группе $F_{m,n}$ может не существовать наименьшего идеала, содержащего R. Это видно из следующего примера. Пусть m=2, n=3 и R состоит из одного элемента $[x_1 ,x_2]^{x3 -1}$. Если в группе $G \in \Sigma_2$, порожденной x_1, x_2, x_3, выполняется соотношение $[x_1 ,x_2]^{x3 -1}=1$, то либо $[x_1 ,x_2]=1$ либо $x_3 \in G_2$.

Обозначим через $\Sigma_m (R)$ множество жестких групп из Σ_m, порожденных x_1, … , x_n , на которых выполняются соотношения R. Группу из $\Sigma_m(R)$ назовем максимальной, если для нее в $\Sigma_m(R)$ не существует собственного накрытия. Из теоремы 1 следует, что для всякой группы из $\Sigma_m(R)$ существуют максимальные накрытия этой группы. Каждую из максимальных групп множества $\Sigma_m(R)$ можно понимать как группу, заданную в классе Σ_m с помощью образующих элементов x_1, … , x_n и определяющих соотношений R. В рамках выпонения работ по государственному контракту, Н.С. Романовским была получена

ТЕОРЕМА 2. Для любого R в множестве $\Sigma_m(R)$ существует лишь конечное число максимальных групп.

Будем говорить, что R полное множество определяющих соотношений, если в $\Sigma_m(R)$ существует единственная максимальная группа, которая таким образом однозначно определяется соотношениями R. Таким образом, в рамках выпонения работ по государственному контракту, Н.С. Романовским была получена

ТЕОРЕМА 3. Всякая конечно порожденная группа из класса Σm полно конечно определена, т.е. может быть задана в Σ_m полным конечным множеством определяющих соотношений.

В связи с последней теоремой напомним факт, показывающий различие с классическим случаем, о том, что свободная m разрешимая группа ступени $m-1\geq 2$ не конечно определена в многообразии A разрешимых групп ступени $\leq m$. Также в классическом случае хорошо известен пример разрешимой конечно определенной группы с алгоритмически неразрешимой проблемой равенства, построенный О.Г.Харлампович. Мы даем определение канонического представления данной жесткой группы на ее порождающих элементах $x_1, \dots, x_n$. Если имеется такое представление, то в группе по меньшей мере разрешима проблема равенства. Следующее утверждение касается алгоритмической разрешимости проблемы равенства в жестких группах, заданных определяющими соотношениями. В рамках выпонения работ по государственному контракту, Н.С. Романовским была получена

ТЕОРЕМА 4. Для данного конечного множества соотношений $R = R(x_1,\dots, x_n)$ эффективно строится конечное множество $\Omega_m(R)$ канонических представлений на порождающих $x_1, \dots, x_n$ групп из $\Sigma_m(R)$, среди которых содержатся все максимальные группы множества $\Sigma_m(R)$.

Однако, мы не умеем эффективно узнавать, какие из групп множества $\Omega_m(R)$ точно являются максимальными, а какие нет. Тем не менее, например, максимальную группу максимального ранга можно точно указать. Из теоремы, в частности, получается, что для любого слова $v(x_1, \dots, x_n)$ можно эффективно определить, представляет ли это слово единичный элемент во всех n-порожденных группах из Σ_m, на которых выполняются соотношения R, или, другими словами, является ли соотношение v следствием соотношений R в классе Σ_m. Этот факт также можно вывести из того, что конечно порожденная жесткая группа вкладывается в последовательное сплетение нескольких свободных абелевых групп конечных рангов (доказано в [44]) и из разрешимости универсальной теории такого сплетения (доказано в [51]).

И.А.Хохлова занималась изучением параболических подгрупп в конечных специальных линейных группах. Напомним, что подгруппа P специальной линейной группы $SL_n(q)$ называется параболической, если P содержит подгруппу, сопряжённую с группой всех верхнетреугольных матриц. И.А.Хохловой изучалось действие группы автоморфизмов группы $Sl_n(q)$ на классах сопряжённых параболических подгрупп. В частности, ей получено исчерпывающее описание параболических подгрупп P, удовлетворяющих следующему равенству: $N_{Aut(SL\_n(q))}(P)PSL_n(q)=Aut(SL_n(q))$, где $N_{Aut(SL\_n(q))}(P)$ — нормализатор подгруппы P в $Aut(SL_n(q))$, а $PSL_n(q)$ - факторгруппа группы $SL_n(q)$ по центру.

Пусть A - область целостности. Для конечнопорожденного проективного A-модуля M ранга один найдены условия, при которых существует обобщенная супералгебра векторного типа с четной частью A и нечетной частью M. Исследована связь этих супералгебр с группой Пикара. Хорошо известна конструкция Кантора, которая по ассоциативно-коммутативной алгебре с дифференцированием позволяет построить йорданову супералгебру. Полученная таким образом йорданова супералгебра принадлежит классу супералгебр векторного типа. Супералгебры векторного типа играют важную роль при построении контрпримеров. С.В. Пчелинцевым были построены примеры первичных (-1,1)-алгебр и йордановых алгебр с абсолютными делителями нуля, так называемые "Монстры Пчелинцева". Е. И. Зельманов, Ю.А. Медведев и И.П. Шестаков с помощью йордановых супералгебр векторного типа были даны другие конструкции "Монстров Пчелинцева". Йордановы супералгебры векторного типа с одним дифференцированием изучались в работах К. Маккриммона, им был найден критерий простоты йордановой супералгебры и доказана специальность таких йордановых супералгебр. Е.И. Зельманов и К. Мартинес построили универсальную ассоциативную обертывающую алгебру для простой йордановой супералгебры векторного типа с одним дифференцированием. Как и в случае обычных алгебр, йордановы супералгебры тесно связаны с альтернативными и (-1,1)-супералгебрами. Е.И. Зельманов и И.П. Шестаков описали первичные альтернативные супералгебры над полями характеристики не 2,3. Затем И.П. Шестаков классифицировал первичные альтернативные супералгебры без ограничений на характеристику, но при некоторых ограничениях невырожденности на четную часть. В частности, были описаны все простые альтернативные супералгебры. Оказалось, что они либо конечномерны, либо являются скрученными супералгебрами векторного типа, т.е. получаются подобно процессу удвоения Кантора из ассоциативно-коммутативных алгебр с дифференцированием. И, наконец, И.П. Шестаковым были описаны простые (-1,1)-супералгебры характеристики не 2,3. Оказалось, что четная часть A такой супералгебры является ассоциативно-коммутативной алгеброй, а нечетная часть M - конечнопорожденный ассоциативный и коммутативный A-модуль. Умножение в M задается с помощью фиксированных конечных множеств дифференцирований и элементов алгебры A. При некоторых ограничениях на алгебру A нечетная часть M является однопорожденным A-модулем, а исходная (-1,1)-супералгебра является скрученной супералгеброй векторного типа. Следует отметить, что присоединенная йорданова супералгебра для простой (-1,1)-супералгебры является унитальной простой специальной супералгеброй с ассоциативной четной частью. В. Н. Желябиным и И.П. Шестаковым были описаны унитальные простые специальные йордановы супералгебры с ассоциативной четной частью A, нечетная часть M которых является ассоциативным A-модулем. Если супералгебра не является супер-алгеброй невырожденной билинейной суперформы, то ее четная часть A - дифференциально простая алгебра относительно некоторого множества дифференцирований, а нечетная часть M - конечнопорожденный проективный A-модуль ранга 1. Умножение в M задается с помощью фиксированных конечных множеств дифференцирований и элементов алгебры A. Если число порождающих A-модуля M равно 1, то исходная йорданова супералгебра является супералгеброй векторного типа J(A,D). Первый пример простой йордановой супералгебры векторного типа над полем действительных чисел, у которой M не является однопорожденным A-модулем, был построен И.П.

Шестаковым. Пример подобной супералгебры, но уже над полем характеристики ноль, в котором нельзя извлечь квадратный корень из -1, был построен В.Н. Желябинын. И, наконец, участник проект В.Н. Желябин, в рамках исполнения государственного контракта, построил пример простой йордановой супералгебры векторного типа над произвольным полем характеристики ноль, у которой М не является однопорожденным А-модулем. Полученный результат является решением проблемы Канторини-Каца. Йордановы супералгебры изучались в работах И. Капланского. Супералгебры оказались исключительно полезными в теории многообразий алгебр. Так А.Р.Кемер с помощью супералгебр развил теорию многообразий ассоциативных алгебр, позволившую ему решить знаменитую проблему Шпехта о конечной базируемости тождеств любой ассоциативной алгебры над полем нулевой характеристики. Другими впечатляющими примерами применения супералгебр явились результаты Е.Зельманова о нильпотентности энгелевых алгебр Ли и о разрешимости йордановых ниль-алгебр ограниченного индекса. Этими же методами, с использованием классификации первичных альтернативных супералгебр, Е.Зельманов и И.Шестаков доказали нильпотентность радикала свободной альтернативной алгебры. В 1977 г. В.Кац описал простые конечномерные лиевы супералгебры над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики, и в том же году он описал йордановы супералгебры при тех же ограничениях, используя функтор Кантора-Кехера-Титса, связывающий категории йордановых и лиевых супералгебр. Классификация В. Каца была дополнена И. Кантором, который определил супералгебру грассмановых скобок. Е.Зельманов и М.Расин описали конечномерные простые йордановы супералгебры над полем произвольной характеристики, отличной от 2, при дополнительном ограничении полупростоты четной части. Классификация Е.Зельманова и М.Расина была уточнена И П. Шестаковым. Позже Е.Зельманов и К.Мартинес описали конечномерные простые унитальные йордановы супералгебры, четная часть которых имеет ненулевой нильпотентный идеал. Как оказалось, всякая такая супералгебра, не изоморфная супералгебре Чанга-Каца, может быть получена процессом удвоения Кантора из ассоциативной суперкоммутативной супералгебры. В 2001 году Е.Зельманов, В.Кас, К.Мартинес описали простые Z-градуированные унитальные йордановы супералгебры, у которых размерности однородных компонент ограничены в совокупности. Неунитальные конечномерные простые йордановы супералгебры над полем произвольной характеристики, отличной от 2, были также описаны Е. Зельмановым.

Одними из первых, кто обратил внимание на важность изучения дифференциально простых алгебр, были Х. Цассенхаус [52], А. А. Алберт [53] и Н. Джекобсон (1957). Н. Джекобсон привел пример класс дифференциально простых ассоциативных колец, не являющихся простыми. Алберт применил понятие дифференицально простой алгебры для исследования простых коммутативных алгебр с ассоциативными степенями. Дифференциально простые ассоциативные алгебры изучались далее в работах Е. Познера [54] и Л. Харпер [55]. В частности, Е. Познер доказал, что всякое дифференциально простое ассоциативное кольцо характеристики 0 является первичным, а в случае наличия минимального идеала – простым. Р. Блок [56] в 1969 г. классифицировал дифференциально простые кольца произвольной характеристики с минимальным идеалом в терминах простых колец, что, в частности, позволило ему описать структуру полупростых алгебр Ли простой характеристики. Блоком в упомянутой работе была доказана теорема о том, что всякое дифференциально простое кольцо простой характеристики с минимальным идеалом представляет собой тензорное произведение простого кольца на дифференциально простое ассоциативно-коммутативное кольцо с минимальным идеалом. Дифференциально простые ассоциативно-коммутативные кольца простой характеристики, в свою очередь, изучались Юаном [57]. Дифференциально простые (супер)алгебры и по сей день играют очень важную роль в математике. К примеру, они применяются при описании (некоммутативных) йордановых, альтернативных супералгебр. В 1995 г. Ченг [59] обобщил результаты Блока на случай супералгебр, применив полученные результаты к полупростым супералгебрам Ли. Интересный обзор, посвященный изучаемой проблеме, можно найти в работе Артемовича [58] 2005 года. В работе 2009 года [60], выполненной участником государственного контракта Поповым А. А., был получен полный аналог теоремы Блока для дифференциально простых альтернативных алгебр простой характеристики, а именно доказано, что всякая дифференциально простая альтернативная алгебра простой характеристики есть тензорное произведение своего центра (дифференциально простой ассоциативно-коммутативной алгебры) на алгебру Кэли-Диксона (единственный класс простых альтернативных алгебр), при этом наличия минимального идеала в исследуемой алгебре не требовалось. В этой работе было получено обобщение результата Познера: доказано, что дифференциально простая альтернативная алгебра характеристики 0 будет первичной алгеброй. Исполнителем государственного контракта Поповым А. А., в рамках исполнения государственного контракта, получены аналогичные результаты для класса йордановых алгебр.

Теорема. Дифференциально простая йорданова алгебра над полем характеристики 0 первична и невырождена.

Данный результат является обобщением хорошо известной теоремы Херстейна на случай дифференциально простых алгебр: если A - ассоциативная D-простая алгебра, то алгебра $A^{(+)}$ также будет D-простой. Доказано, что центр дифференциально простой йордановой алгебры J над полем простой характеристики (не равной 2), не являющейся гомоморфным образом специальной йордановой алгебры, представляет собой дифференциально простую ассоциативно-коммутативную алгебру, в частности, такая алгебра будет иметь единицу. При этом сама дифференциально простая йорданова алгебра, не являющаяся гомоморфным образом специальной йордановой алгебры, представляет собой тензорное произведение своего центра на алгебру Алберта (единственный класс примеров простых исключительных йордановых алгебр), то есть установлен полный аналог теоремы Блока для класса дифференциально простых йордановых алгебр простой характеристики, не являющихся гомоморфными образами специальных йордановых алгебр. Установлено, что любая исключительная дифференциально простая йорданова алгебра является PI-алгеброй. Для получения результатов использовалась хорошо развитая структурная теория йордановых алгебр (см. [61], [62]), включая известные труды Е. Зельманова о первичных йордановых алгебрах.

В рамках выполнения государственного контракта, участником проекта Т. И. ым были описаны ценрализаторы в универсальной обертывающей простой нелиевой 7-мерной алгебры Мальцева. Данная работа обобщает хорошо известные ранее полученные результаты других участников проекта В. Н. Желябина и И. П. Шестакова.

Основы теории базисов Гребнера и Гребнера-Ширшова были независимо заложены А.И. Ширшовым для (анти-)коммутативных неассоциативных алгебр и алгебр Ли в начале 60-х годов [63], Х. Хиронакой [64] для коммутативных алгебр бесконечных рядов и Б. Бухбергером [65] для алгебр многочленов. Отличительной особенностью этой теории в коммутативном случае является ее конструктивность — по данному множеству определяющих соотношений алгебры можно алгоритмически вывести, равны ли в ней образы двух данных формальных выражений (полиномов). Это обстоятельство обусловливает широчайшую область применения теории базисов Гребнера-Ширшова в коммутативной алгебре и алгебраической геометрии, комбинаторной алгебре, теории чисел, алгебраической топологии и др. В некоммутативном (и тем более неассоциативном) случае нельзя а priori утверждать, что алгоритм вычисления базиса Гребнера-Ширшова закончится за конечное число шагов ввиду отсутствия нетеровости. Несмотря на это, понятие базиса Гребнера-Ширшова и алгоритм вычисления композиций (s-полиномов по терминологии Б. Бухбергера) являются мощным универсальным методом решения теоретических задач алгебры, в частности, доказательства теорем вложения, схожих с классическим результатом Пуанкаре-Биркгофа-Витта (PBW-Theorem) о строении универсальной обертывающей ассоциативной алгебры для алгебры Ли. Основную задачу, на решение которой направлены методы теории базисов Гребнера-Ширшова, можно охарактеризовать следующим образом: установить, следует ли данное соотношение (тождество, правило) из данного (не обязательно конечного) набора соотношений (тождеств, правил) в рамках данной системы правил вывода. Метод основан на алгебраической вариации леммы Неймана о ромбе (Diamond Lemma), носящей название леммы о композиции (Composition-Diamond Lemma, CD-Lemma). В каждом конкретном классе алгебраических систем требуется найти свой контекст применения леммы о ромбе, т.е. доказать свою CD-лемму. Данный контекст включает: базис свободной алгебры рассматриваемого класса (множество правильных мономов), линейное упорядочение мономов, согласованное с умножением, понятие композиции и понятие тривиальности композиции по модулю данной системы соотношений. В рамках данных понятий базис Гребнера-Ширшова — это такое множество полиномов S, что любая композиция любых двух полиномов из S тривиальна по модулю S. В настоящее время версии леммы о композиции известны для следующих классов алгебр (кроме уже упомянутых выше классических случаев): (цветных) супералгебр Ли (А.А. Михалев, 1989, [66]), p-алгебр ли (А.А. Михалев, 1992, [67]), ассоциативных конформных алгебр (Бокуть-Фонг-Ке, 2004 [68]), модулей над алгебрами Ли (Канг-Ли, 2000, [69]; Чибриков, 2004, [70]), право-симметричных алгебр (Бокуть-Чен-Ли, 2008, [71]), диассоциативных алгебр (Бокуть-Чен-Лю, 2010, [72]), ассоциативных алгебр с множеством операторов (Бокуть-Чен-Сю, 2010, [73]), алгебр Рота-Бакстера (Бокуть-Чен-Ден, 2010, [74]) и ряда других. В рамках проекта доказана лемма о композиции для «дважды свободных» алгебр Ли, т.е. для свободных алгебр Ли над свободной ассоциативно-коммутативной алгеброй (алгеброй многочленов). Для этого класса алгебр введены четыре типа композиций: включения, пересечения, внешняя композиция и композиция умножения. Первые два типа композиций являются «классическими» - они составляют основу теории базисов Гребнера-Ширшова для алгебр Ли и ассоциативных алгебр над полем — вторые два типа специфичны для теории алгебр Ли над кольцами многочленов. Доказана

Теорема. (CD-лемма для $\mathrm{Lie}_{k[Y]}(X)$). Пусть $S \subset \mathrm{Lie}_{k[Y]}(X)$ — непустое множество унитарных над полем k полиномов дважды свободной алгебры Ли и Id(S) — идеал над k[Y] алгебры $\mathrm{Lie}_{k[Y]}(X)$, порожденный множеством S. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

(i) S — базис Гребнера-Ширшова в $\mathrm{Lie}_{k[Y]}(X)$;

(ii) старшие части элементов из Id(S) содержат подслова, являющиеся старшими частями элементов из S;

(iii) множество Irr(S) всех S-редуцированных мономов является k-базисом алгебры $\mathrm{Lie}_{k[Y]}(X \mid S) = \mathrm{Lie}_{k[Y]}(X)/\mathrm{Id}(S)$.

Хорошо известно, что любая алгебра Ли над полем вкладывается в коммутаторную алгебру ассоциативной алгебры, т. е. является специальной. Этот факт неверен для алгебр Ли над коммутативным кольцом — для многих колец K, в частности, для кольца многочленов K=k[Y] от нескольких переменных существуют K-алгебры Ли, не являющиеся специальными. Первые примеры не специальных алгебр Ли были построены Ширшовым [75] и Картье [76], впоследствии Коном [77] (в последнем случае авторское доказательство 1963 года так и не было опубликовано). При помощи развитого в рамках проекта метода базисов Гребнера-Ширшова для алгебр Ли над кольцом получено новое общее доказательство исключительности алгебр, найденых Ширшовым, Картье и Коном. Именно, все эти примеры представляют собой алгебры Ли с одним определяющим соотношением. Нами доказана

Теорема (L.A. Bokut et al). Для любого коммутативного кольца K всякая K-алгебра Ли с одним определяющим соотношением специальна.

Следствие. Пусть $K = k[\, y_1, y_2 , y_3 \mid y_i = 0, i = 1, 2, 3]$ — алгебра ограниченных полиномов над полем k характеристики > 0. Тогда алгебры Ли L_p = Lie K (x_1 , x_2 , x_3 | y_3 x_3 = y_2 x_2 + y_1 x_1) при p=2,3,5 не являются специальными.

Кроме того, доказано, что проблема равенства для конечно-определенных K-алгебр Ли с однородными определяющими соотношенями алгоритмически разрешима в случае, когда K конечно порождено. Показано, что всякая не более чем счетнопорожденная K-алгебра Ли вкладывается в двупорожденную K-алгебру Ли.

Понятие двойственности в смысле Кожуля было введено в гомологической алгебре в работе С. Придди [78] в 1970 г. для квадратичных ассоциативных алгебр (т. е. с однородными определяющими соотношениями второй степени). Именно, если алгебра A порождается пространством V и определяющими соотношениями S (также образующими подпространство в V□ V), то Кожуль-двойственная алгебра $A^!$ порождается дуальным пространством V* и ортогональным дополнением S* к пространству соотношений S. Ю. Манин [79] ввел для квадратичных алгебр конструкции «белого» и «черного» произведения алгебр, обозначаемые A□ B и A□ B соответственно, которые известны как произведения Манина. Эти конструкции дуальны друг другу относительно двойственности Кожуля: $(A\square B)^! = A^! \square B^!$. Важнейшим достижением Ю. Манина в этой области явилось доказательство эквивалентности Hom(A□ $B^!$, C) и Hom(A, B□ C), откуда следует, что черное произведение Манина алгебры A и ее Кожуль-двойственной алгебры $A^!$ является алгеброй Хопфа. Многие примеры квантовых групп были реализованы таким образом, см. монографию [80]. В основополагающей работе В. Гинзбурга и М. Капранова [81] теория Придди и Манина для квадратичных алгебр была связана с теорией когомологий графов М. Концевича [82], [83], возникшей при изучении пространств модулей алгебраических кривых. Понятем, объединяющим эти первоначально далекие друг от друга области, явилось не новое на тот момент понятие операды. Операды были введены Дж. Мэем в 1972 г. [84] для нужд теории гомотопий. Постепенно математическим сообществом было признано, что это понятие имеет фундаментальное значение для математики в целом. С алгебраической точки зрения операда представляет собой совокупность данных, формализующих свойства набора множеств отображений вида $X^n \to X$, $n = 1, 2, \ldots$, замкнутого относительно перестановок аргументов и всех возможных суперпозиций. Такой набор может быть получен последовательным применением композиций к некоторым первичным отображениям, называемым порождающими операды, и, как в случае алгебр, структура операды может быть полностью задана при помощи набора соотношений между порождающими. Иными словами, понятие операды является абстракцией следующего уровня по отношению к алгебре: вместо элементов рассматриваются операции, а вместо отдельных алгебр — классы, определяемые операдой (многообразия алгебр). Все классы алгебр, возникающие на практике (ассоциативные, лиевы, алгебры Пуассона, йордановы и т. п.) определяются подходящими операдами. В то же время, многие алгебраические вопросы, которые можно выразить в терминах породающих элементов и определяющих соотношений, имеют важное значение в теории операд — они отражают фундаментальные свойства алгебраических операций. В частности, можно построить «гомологическую алгебру» для операций, т. е. исследовать их высшие сизигии. Понятие двойственности Кожуля, а также конструкции белого и черного произведений Манина переносятся на операды естественным образом [81]. Примером пары двойственных операд является пара Com, Lie операд, соответствующих классам коммутативных и лиевых алгебр соответственно. Операды As и Pois, отвечающие ассоциативным алгебрам и алгебрам Пуассона, двойственны самим себе. Другим примером пары Кожуль-двойственных операд являются Dias и Dend — операды диассоциативных алгебр и (ассоциативных) дендриформных алгебр. Эти классы алгебр изначально возникли в теории когомологий алгебр Ли и алгебраической топологии, см. [85]. С момента их появления в алгебраическом рассмотрении дендриформные алгебры и их связи с другими областями математики интенсивно исследуются. Были найдены другие подобные структуры, три-, квадри-, эннеа- и окто-алгебры, со все возрастающим уровнем сложности свойств конструкций. Как показали К. Эбрахими-Фард и Л. Гуо [86], ключевыми являются понятия ди- и триалгебр, остальные получаются из них при помощи определенных категорных конструкций.

Поэтому в рамках данного проекта мы сосредоточились на изучении ди- и три-алгебр и их дендриформных аналогов. Доказана двойственность категорий диалгебр многообразия Var и дендриформных алгебр многообразия $\mathrm{Var}^!$ в общем случае, это обобщает ряд результатов работ [85], [87], [88]. Напомним, что диассоциативные алгебры представляют собой системы с двумя билинейными операциями $\square_1$ и $\square_2$ такими, что операция $[x,y] = x \square_1 y - y \square_2 x$ удовлетворяет левому тождеству Лейбница $[x,[y,z]] = [[x,y],z] + [y,[x,z]]$. Таким образом, диассоциативные алгебры играют роль ассоциативных обертывающих для алгебр Лейбница. Общее определение того, что следует считать диалгеброй данного многообразия Var (di-Var-алгеброй), было дано П. Колесниковым в [89]. С категорной точки зрения операда diVar, соответствующая классу всех di-Var-алгебр, является белым произведением Манина операд Var и Perm. Последняя была введена Ф. Шапотоном [90], она описывает класс лево-коммутативных алгебр, т. е. ассоциативных алгебр, удовлетворяющих тождеству $(xy)z = (yx)z$. Отметим, что специфика операды Perm позволяет определить белое произведение Манина $\mathrm{Var} \square \mathrm{Perm}$ для произвольной, не обязательно квадратичной или даже бинарной операды Var. Дуальность произведений Манина относительно двойственности Кожуля влечет $(\mathrm{Var} \square \mathrm{Perm})^! = \mathrm{Var}^! \square \mathrm{Perm}^!$. Хорошо известно, что $\mathrm{Perm}^! = \mathrm{PreLie}$ — операда левосимметричных (пре-лиевых) алгебр. Следовательно, имеет место следующая

Теорема (П.Колесников, В. Губарев)**.** Если Var — бинарная квадратичная операда, то дендриформная алгебра многообразия Var определяется операдой $\mathrm{dendVar} = \mathrm{Var} \square \mathrm{PreLie}$.

Но черное произведение Манина определено лишь для бинарных квадратичных операд, кроме того, как было указано И.П. Шестаковым, описанный подход не является конструктивным, так как не позволяет явно выписать определяющие соотношения — тождества многообразия dendVar. Поэтому мы нашли другой подход, в терминах тождеств, который работает для произвольного многообразия. Более того, подход можно распространить на более общий класс объектов — триалгебры. Последние изначально возникли в работе Ж. Лодея и М. Ронко [87] по алгебраической K-теории. Построен эффективный алгоритм, позволяющий по любому множеству полилинейных определяющих тождеств многообразия Var найти множество определяющих тождеств для класса dendVar. Именно, пусть $f(x_1, \ldots , x_n)$ — полилинейный многочлен от n переменных. Его можно рассматривать как линейную комбинацию бинарных деревьев с коэффициентами из основного поля. Применим алгоритм разметки вершин, описанный П.Колесниковым в [89] со следующим изменением: справа от метки $*_1$ и слева от метки $*_2$ всюду вершины помечаются операцией $*_1+*_2$. В случае триалгебр рассматривается сумма $*_1+*_2+*_3$. В результате многочлен f преобразуется в полилинейное соотношение на дендриформной алгебре f^*. Назовем дендриформной Var-алгеброй такую систему, которая удовлетворяет всем тождествам $f^*=0$, где f — определяющие тождества многообразия Var. Доказана

Теорема. (П.Колесников, В. Губарев)**.**

В случае бинарной квадратичной операды Var многообразие dendVar определяется в точности операдой dendVar.

Все описанные в литературе многообразия дендриформных алгебр (Dend, алгебры Цинбеля, L-алгебры и т. п., см. [91]) являются частными случаями этого определения.

Следствие. Для бинарной квадратичной операды Var $(\text{di-Var})^! = \text{dend}(\text{Var}^!)$.

Одной из важнейших конструкций в теории бинарных квадратичных операд является произведение Манина. Вычисление этого произведения для двух данных операд представляет собой нетривиальную задачу. В рамках проекта показано, что эта задача сводится к задаче вычисления пересечения двух подпространств в векторном пространстве большой размерности, разработан и реализован вычислительный алгоритм, позволяющий решить данную задачу на ЭВМ. Проверен и подтвержден ряд гипотез теории операд, опубликованный недавно в [92]. Именно, установлено, что операда L-дендриформных алгебр действительно представляет собой квадрат (относительно черного произведения) операды PreLie, а белое произведение As и Lie есть свободная операда, порожденная двумя операциями.

Исследования в области градуированных алгебр мотивированы тем, что для многих задач алгебраической геометрии и топологии не достаточно рассматривать только структуру алгебры на том или ином пространстве функций — нужно фиксировать дополнительную информацию, которая часто формализуется как градуировка — разбиение этого пространства на прямую сумму (не обязательно конечную) подпространств, индексированных элементами некоторой группы. Элементы этих подпространств называются однородными, и произведение двух однородных элементов — снова однородный элемент, индекс которого получается произведением индексов исходных сомножителей. Одним из наиболее часто встречающихся примеров градуированных алгебр являются супералгебры Ли, формализующие явление суперсимметрии состояний частиц с полуцелым спином (фермионов) в математической физике. С алгебраической точки зрения супералгебры Ли — это Z2-градуированные алгебры, Z2 — группа из двух элементов. Структурная теория градуированных колец и алгебр развивается с середины прошлого века, см. [93]. Существенный прогресс был достигнут в последние годы в работах [94], [95], [96] и др. в направлении классификации всех возможных градуировок на простых ассоциативных, лиевых и йордановых алгебрах. Так, И.П. Шестаковым и А. Элдуки были описаны градуировки на простых конечномерных алгебрах Ли. Близкое направление исследований — классификация градуированно простых алгебр. В рамках проекта решена задача описания градуированно простых ассоциативных конформных алгебр конечного типа. Само понятие конформной алгебры было введено В. Кацем [97] как инструмент исследования сингулярной части разложения операторного произведения (OPE) в конформной теории поля. Оказалось [98], что конформные алгебры представляют собой частный случай более общей картины: с любой алгеброй Хопфа H можно связать категорию алгебраических систем, заданных обычными алгебраическими операдами As, Lie, Com и т. п., но со значениями в операде псевдолинейных преобразований модуля над H. Поскольку одним из наиболее естественных источников алгебр Хопфа представлен линейными алгебраическими группами, естественно выделить класс соответствующих систем для углубленного изучения [99]. Эти системы называются конформными алгебрами над линейной алгебраической группой G. Случай конформных алгебр в смысле В. Каца соответствует $G=A_1$ — аффинной прямой. При этом класс обычных алгебр над полем совпадает с классом конформных алгебр над тривиальной группой. Структурная теория ассоциативных конформных алгебр конечного типа (т. е. конечно-порожденных как H-модули) известна для случая тривиальной группы (классические теоремы Веддерберна) и случая, когда H — универсальная обертывающая конечномерной алгебры Ли [98], [100]. В этих случаях алгебра H является областью целостности, что существенно ограничивает область применения примененных в этих работах подходов. В рамках работ по проекту мы рассмотрели случай, когда G — произвольная (не обязательно связная) линейная алгебраическая группа, компонента связности которой G^0 изоморфна аффинной прямой. Оказалось, что такие системы описываются в терминах градуировок на конформной алгебре над аффинной прямой. Доказана даже более общая

Теорема (П. Колесников**).** Конформная алгебра над линейной алгебраической группой G есть конформная алгебра над G^0 градуированная конечной группой G/G^0.

Этот результат является основанием для определения понятия градуированной конформной алгебры. Найдена классификация простых градуированных ассоциативных конформных алгебр конечного типа.

Теорема (П. Колесников**).** Любая простая градуированная ассоциативная конформная алгебра конечного типа алгебра изоморфна градуированной конформной алгебре петель над конечномерной простой градуированной алгеброй.

Методы доказательства этой теоремы позволяют получить градуированный аналог теоремы Бернсайда о неприводимых алгебрах линейных преобразований: для конечномерного Г-градуированного пространства V над алгебраически замкнутым полем описаны все градуированно неприводимые градуированные подалгебры в алгебре End V линейных преобразований этого пространства. В отличие от классической теоремы Бернсайда, такая подалгебра не обязана совпадать со всей алгеброй.

Теорема (П.Колесников). Градуированно неприводимая подалгебра A в End V является скрученной прямой суммой полных матричных алгебр над групповой алгеброй некоторой конечной подгруппы в Г.

За время выполнения НИР исполнителями защищена 1 докторская и 2 кандидатских диссертации (см. Приложение А)

Принято в штат Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН 2 молодых исполнителя НИР:

к.ф.-м.н. Кайгородов Иван Борисович,

к.ф.-м.н. Гончаров Максим Евгеньевич.

Принят в штат СУНЦ НГУ 1 исполнитель НИР кандидат наук физико-математических наук Гальт Алексей Альбертович.

Зачислен в аспирантуру ИМ СО РАН 1 исполнитель НИР выпускник ММФ НГУ Старолетов Алексей Михайлович.

Поступили в магистратуру ММФ 2 студента исполнителя НИР: Губарев Всеволод Юрьевич, Воронин Василий Юрьевич.

Приняты в штат ООНИ НИЧ и ИДМИ Новосибирского государственного университета 3 студента исполнителя НИР: Воронин Василий Юрьевич, Губарев Всеволод Юрьевич, Попов Александр Александрович.

Количество исследователей — исполнителей НИР, результаты работы которых в рамках НИР опубликованы в высокорейтинговых российских и зарубежных журналах — 17 (см. Приложение Б).

Количество подготовленных и опубликованных научных трудов: Опубликовано 33 научных статьи (см. Приложение Б).

Количество сделанных научных докладов: Сделано 7 докладов на отечественных и 46 докладов на международных научных форумах и конференциях (см. Приложение В).

1.2 Разработка программы внедрения НИР в образовательный процесс

Результаты исследований непрерывно внедряются в учебный процесс Новосибирского государственного университета (НГУ). С момента основания Сибирского отделения (СО) РАН и НГУ, преподавателями Механико-математического факультета (ММФ) были активно работающие учёные институтов СО РАН. В результате, читаемые в НГУ курсы, непрерывно пополнялись материалом, основанным на новых результатах, получаемых сотрудниками СО РАН.

Результаты, полученные в рамках выполнения проекта, вошли в программы читаемых в НГУ курсов. Среди них:

1. «Высшая алгебра». Данный курс является основным образовательным лекционным курсом для студентов 1 курса ММФ НГУ. Продолжительность курса составляет два семестра, предполагаемое количество слушателей 120 человек. В данный курс включены результаты, полученные в рамках НИР группой исследователей во главе с проф. В.Д.Мазуровым и проф. И. П. Шестаковым.
2. «Теория йордановых алгебр». Данный курс является образовательным лекционным спецкурсом для студентов 1-6 курсов НГУ, специализирующихся в области алгебры. Продолжительность курса составляет 72 часа, предполагаемое количество слушателей 30 человек. В курсе используются последние научные достижения в области йордановых супералгебр, полученных И.Б. Кайгородовым и В.Н. Желябиным.
3. «Теория Галуа». Данный курс является основным образовательным лекционным курсом для студентов 4 курса ММФ НГУ. Продолжительность курса составляет один семестр, предполагаемое количество слушателей 60 человек. В данный курс включены результаты, полученные в рамках НИР исследователем Н.С. Романовским.
4. «Алгебра-3». Данный курс является обязательным образовательным лекционным спецкурсом для студентов магистратуры и аспирантуры НГУ, специализирующихся на кафедре алгебры и математической логики. Продолжительность курса составляет 2 семестра, предполагаемое количество слушателей 15 человек. В курсе используются научные достижения, полученные П.С. Колесиковым.
5. «Теория колец». Данный курс является образовательным лекционным спецкурсом для студентов 1-6 курсов НГУ, специализирующихся в области алгебры. Продолжительность курса составляет 2 семестра, предполагаемое количество слушателей 30 человек. В курс включены последние научные достижения в области теории колец, полученные

А.П. Пожидаевым и В.Н. Желябиным.

Полученные в ходе реализации проекта результаты вошли, в рамках соответствующих специальных курсов, в новые магистерские программы 3 поколения ФГОС ВПО по направлению подготовки 010100 «Математика».

Разработаны новые образовательные программы бакалавриата:

- Бакалаврская программа по «Теории групп»
- Бакалаврская программа по «Теории колец»

Список разработанных образовательных программ аспирантуры:

- Аспирантская программа по «Теории групп»
- Аспирантская программа по «Теории колец»

В рамках проекта были разработаны 2 научно-методических пособия:

- «Введение в конечномерные алгебры Ли»
- «Теория йордановых алгебр»

Методическое пособие «Введение в конечномерные алгебры Ли» было разработано исследователями проекта В.Н. Желябиным и М.Е. Гончаровым. Пособие предназначено для студентов старших курсов ММФ НГУ, специализирующихся в области алгебр Ли. Данное пособие основывается на материале специализированных курсов, прочитанных авторами в течение последних для студентов механико-математического факультета НГУ. Целью курса является изучение структурной теории конечномерных алгебр Ли над алгебраически замкнутом полем характеристики ноль и их конечномерных представлений. Особое внимание уделяется изложению методов работы с линейными операторами, действующими на конечномерных векторных пространствах, а также изложению методов работы с нильпотентными, разрешимыми, полупростыми алгебрами Ли.

Методическое пособие «Теория йордановых алгебр» разработано исследователями проекта В.Н. Желябиным и И.Б. Кайгородовым. Данное пособие основывается на материале специализированных курсов, прочитанных авторами для студентов механико-математического факультета НГУ. Целью курса является изучение структурной теории йордановых алгебр. Особое внимание уделяется изложению методов работы с полилинейными тождествами и линейными операторами, а также изложению методов работы с нильпотентными, разрешимыми и простыми йордановыми алгебрами. Йордановы алгебры - классический раздел современной математики, связанный с именами Н. Джекобсона, Е. Зельманова, К. Маккриммона и др. Основным достижением этой теории является классификация простых и первичных йордановых алгебр. Однако существующие на данный момент учебные пособия на русском языке излагают материал не полностью. Более того, предлагаемая разработка позволяет приступать к изучению материала на более ранней стадии обучения. Предлагаемый курс лекций будет полезен магистрантам, специализирующимся в области алгебры, геометрии, математической и теоретической физики.

1.3. Проведение 3 семинаров

На базе Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Новосибирский государственный университет» и Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (г. Новосибирск), были проведены 3 научно-исследовательских семинара по тематике НИР под руководством приглашенного исследователя проф., д.ф.-м.н. И. П. Шестакова.

05 июля 2011 г.

«Об изучениях биалгебр»

В общем случае биалгебра – это алгебра, на которой задана структура коалгебры, то есть задано коумножение, согласованное в некотором смысле с кумножением. В ассоциативном случае, например, коумножение — это гомоморфизм соответствующих алгебр. Примерами ассоциативных биалгебр служат алгебры Хопфа.

Другим примером биалгебр служат биалгебры Ли, которые были введены Дринфельдом [101] для изучения решений классического уравнения Янга-Бакстера. Решения классических уравнений Янга-Бакстера для простых алгебр Ли были построены в работах А.А. Белавина, В.Г. Дринфельда [102]

Определение биалгебры по Дринфельду (Д-биалгебры), связанное с некоторым многообразием алгебр, было дано Желябиным в работах [105], [106]. В частности, были определены ассоциативные и йордановы Д-биалгебры, а также рассмотрен ассоциативный аналог уравнения Янга-Бакстера и ассоциативные Д-биалгебры, связанные с решениями этого уравнения. Там же были описаны ассоциативные алгебры, допускающие нетривиальную структуру Д-биалгебры с кокоммутативным на центре коумножением. В [107] Агуир исследовал ассоциативные Д-биалгебры (или, как он их называл, сбалансированные биалгебры). В этой работе были изучены некоторые свойства решений ассоциативного аналога уравнения Янга-Бакстера и свойства сбалансированных биалгебр (другое название ассоциативных Д-биалгебр). Желябиным В.Н. была установлена связь между йордановыми коалгебрами и коалгебрами Ли. Класс йордановых Д-биалгебр, связанный с йордановым аналогом уравнения Янга-Бакстера, был определен в [108]. В работе [109] изучались альтернативные Д-биалгебры и их связь с альтернативным уравнением Янга-Бакстера. В работе [105] была установлена связь йордановых Д-биалгебр с биалгебрами Ли, построенная при помощи конструкции Титса-Кантора-Кехера, сопостовляющей каждой йордановой алгебре -1,1 градуированную алгебру Ли. В [109] доказывается аналог данного утверждения в случае, когда А – матричная алгебра Кэли – Диксона, а пара (А,Δ) – альтернативная Д-биалгебра. В [110] изучались некоторые свойства биалгебр Мальцева, в частности здесь были условия на коуножения при которых данная биалгебра является биалгеброй Мальцева.

Хорошо известна конструкция, сопоставляющая произвольной алгебре ее дуальную коалгебру. Для алгебр Хопфа известно, что дуальная коалгебра H° алгебры Хопфа H является алгеброй Хопфа [112].

В [104] для любой алгебры Ли была построена конструкция ее дуальной коалгебры. Было доказано, что дуальная коалгебра исходной биалгебры Ли является биалгеброй Ли.

Определение. Пара (A,Δ), где A – линейное пространство над F, а $\Delta: A\rightarrow A\otimes A$ – линейное отображение, называется коалгеброй. При этом отображение Δ называется коумножением. Для элемента $a\in A$ будем использовать обозначение

$$\Delta(a)=\sum a(1)\otimes a(2).$$

На пространстве A^* всех линейных функционалов, заданных на пространстве A определим умножение, полагая

$$fg(a)=\sum f(a(1))g(a(2))$$

где $f,g\in A^*, a\in A$ и $\Delta(a)=\sum a(1)\otimes a(2)$. Полученная алгебра называется дуальной алгеброй коалгебры (A,Δ).

Дуальная алгебра A^* коалгебры (A,Δ) задаёт бимодульное действие на A.

В работе [ANQ] дано следующее определение коалгебры, связанное с некоторым многообразием алгебр.

Пусть теперь A – произвольная алгебра, на которой задано коумножение Δ и A^* - дуальная алгебра коалгебры (A,Δ). Алгебра A задаёт бимодульное действие на пространстве A^*

На пространстве $D(A)=A+A^*$ можно задать умножение, используя построенные выше действия.

Тогда $D(A)$ является обычной алгеброй над полем F, а A и A^* - подалгебры в $D(A)$. Алгебру $D(A)$ будем называть дублем Дринфельда.

В работе [105] дано следующее определение биалгебры по Дринфельду (Д-биалгебры), связанное с некоторым многообразием алгебр.

Определение. Пусть M - произвольное многообразие F-алгебр и A – алгебра из M, на которой дополнительно задано коумножение Δ. Тогда пару (A,Δ) будем называть M-биалгеброй по Дринфельду, если алгебра $D(A)$ принадлежит многообразию M.

Пусть A – алгебра над полем F с умножением m: $A\otimes A\rightarrow A$, т.е. $m(a\otimes b)=ab$ для любых $a,b\in A$. Тогда имеем сопряженное к m линейное отображение m^*: $A^*\rightarrow(A\otimes A)^*$. Подпространство V из A^* называется хорошим, если $m^*(V^*\square V^*\square V^*)$. На пространстве V зададим коумножение Δ V: $V\rightarrow V\otimes V$, полагая $\Delta(v)=\sum v(1)\otimes v(2)$, если $m^*(v)=\sum v(1)\otimes v(2)$. Пусть $A°$ - наибольшее хорошее подпространство и поэтому $A°$ - коалгебра с коумножением $\Delta°$ (см. [104, 113]). Коалгебра $(A°,\Delta°)$ называется дуальной коалгеброй для алгебры A. Для любых $a,b\in A$ и любого $f\in A°$ имеет место $f(m(a\otimes b))=\sum f(1)(a)f(2)(b)$, где $\Delta°(f)=\sum f(1)\otimes f\_(2)$.

Дуальные коалгебры для йордановых биалгебр изучались в работе [111], где был доказан аналог теоремы Михаэлиса был почти нётеровых йордановых алгебр. Вместе с этим в той же статье строится пример йордановой Д-биалгебры, дуальная коалгебра которой не является подалгеброй в дуальной алгебре.

По результатом данного семинара, участник проекта М. Е. Гончаров обобщил данные результаты на альтернативныфе и ассоциативные Д-биалгебры. Были доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть пара (A,Δ) – альтернативная Д-биалгебра над полем характеристики не равной 2, A^* - дуальная алгебра коалгебры (A,Δ) и $(A°,\Delta°)$ - дуальная коалгебра алгебры A. Тогда $A°$ - подалгебра алгебры A^*, а пара $(A°,\Delta°)$ – альтернативная Д-биалгебра.

Теорема 2. Пусть пара (A,Δ) – ассоциативная Д-биалгебра, A^* - дуальная алгебра коалгебры (A,Δ) и $(A°,\Delta°)$ - дуальная коалгебра алгебры A. Тогда $A°$ - подалгебра алгебры A^*, а пара $(A°,\Delta°)$ – альтернативная Д-биалгебра.

Отметим, что теоремы 1 и 2 являются аналогами ассоциативными и альтернативными аналогами известных результатов [111].

Присутствовали:

проф., д.ф.-м.н. И. П. Шестаков, проф., д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН В. Д. Мазуров, проф., д.ф.-м.н. Романовский Н. С., проф., д.ф.-м.н. Бардаков В. Г., д.ф.-м.н. Васильев А. В., д.ф.-м.н. Вдовин Е. П., д.ф.-м.н. Желябин В. Н., д.ф.-м.н. Пожидаев А. П., к.ф-.м.н. Кайгородов И. Б., к.ф-.м.н. Гончаров М. Е., Воронин В. Ю., Губарев В. Ю., Попов А. А., Руденко А.С., Захаров А.С., Р. И. Басыров , Т. И. Шабалин, Е. М. Охапкина, Ю. С. Попов.

06 июля 2011 г.

«О специальности алгебр»

Актуальным вопросом исследований неассоциативных алгебр является вопрос специальности данной алгебры, или, более общо, данного многообразия алгебр. То есть, вопрос вложимости данной алгебры в присоединенную йорданову или присоединенную лиеву алгебру, построенную из ассоциативной алгебры, путем введения нового антикоммутативного или коммутативного умножения. Хорошо известна теоремой Пуанкаре-Биркгофа-Витта, которая говорит, что каждая алгебра Ли является специальной, то есть вложима в присоединенную лиеву алгебру для подходящей ассоциативной алгебры. В тоже время, существуют йордановы алгебры, называемые исключительными, которые не являются специальными и для них не существует вложения в присоединенную йорданову алгебру для подходящей ассоциативной алгебры. В настоящее время, активно изучаются различные обобщения алгебр Ли, так называемые алгебры Мальцева и бинарно-лиевы алгебры. Хорошо известно, что присоединенная лиева алгебра любой альтернативной алгебры является алгеброй Мальцева. Естественно возникает вопрос о том верно ли что для любой алгебры Мальцева существует подходящая альтернативная алгебра, что алгебра Мальцева вложима в присоединенную лиеву алгебру подхоящей альтернативной алгебры. На данный момент вопрос о вложимости алгебр Мальцева в коммутатор подходящей альтернативной алгебры полностью не решен, но в работах С. Р. Сверчкова и И. П. Шестакова достигнуты существенные продвижения. Более обширным обобщением лиевых алгебр, являются бинарно-лиевы алгебры. Отметим, что на самом деле присоединенная лиева алгебра к ассосимметрической алгебре является бинарно-лиевой. Таким образом, актуализируется и другая проблема [Проблема 2.108 из Днестровской тетради, поставленная В. Т. Филипповым] о специальности — вложение бинарно-лиевых алгебр в коммутатор подходящей ассосимметрической алгебры. В работах И. П. Шестакова и М. Аренаса было показана, что данная проблема решается отрицательно. То есть, были построены примеры бинарно-лиевых алгебр, невложимых в коммутатор ассосимметрической алгебры. Полученный результат порождает проблему вложимости бинарнолиевых алгебр в коммутаторную алгебру бинарно (-1,1)-алгебр.

Таким образом, универсальные обертывающие играют существенную роль в изучении неассоциативных алгебр. На основании проведенного семинара, исполнителем государственного контракта, Т.И. Шабалиным был описан центр универсальной обертывающей в смысле Шестакова-Искердо для полупростой конечномерной алгебры Ли и для единственной простой нелиевой алгебры Мальцева M7. Данная работа обобщает результаты, полученные ранее Шестаковым, Желябиным и Искердо.

Присутствовали:

проф., д.ф.-м.н. И. П. Шестаков, проф., д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН В. Д. Мазуров, проф., д.ф.-м.н. Романовский Н. С., проф., д.ф.-м.н. Бардаков В. Г., д.ф.-м.н. Васильев А. В., д.ф.-м.н. Вдовин Е. П., д.ф.-м.н. Желябин В. Н., д.ф.-м.н. Пожидаев А. П., к.ф-.м.н. Кайгородов И. Б., к.ф-.м.н. Гончаров М. Е., Воронин В. Ю., Губарев В. Ю., Попов А. А., Р. И. Басыров , Т. И. Шабалин, Е. М. Охапкина, Ю. С. Попов.

07 июля 2011 г.

«Конечные простые строго вещественные группы»

Одним из важнейших вопросов в теории групп является вопрос о сопряженности элемента со своим обратным. Напомним, что элемент x группы G называется вещественным (соответственно, строго вещественным), если элементы x и x^{-1} сопряжены в группе G (соответственно, сопряжены инволюцией в группе G). Данный термин связан с тем, что значения обыкновенных характеров на вещественных элементах, очевидно, являются вещественными. Группа G называется вещественной (соответственно, строго вещественной), если все элементы группы G являются вещественными (соответственно, строго вещественными). Проблема вещественности и строгой вещественности конечных простых групп и конечных групп в том или ином смысле близких к простым изучалась различными авторами.

Отметим, что если элемент x является вещественным, то порядок элемента, инвертирующего x, всегда можно выбрать равным степени двойки. Поэтому инволюция является неединичным элементом минимально возможного порядка, инвертирующим x.

В 2005 году А.И. Созутовым в «Коуровскую тетрадь» под номером 14.82 была записана известная проблема.

[14.82, Коуровская тетрадь]. Описать конечные простые группы, в которых каждый элемент является произведением двух инволюций.

Поскольку в любой неабелевой конечной простой группе любая инволюция вкладывается в элементарную абелеву группу порядка 4, проблема 14.82 эквивалентна проблеме классификации конечных простых строго вещественных групп. В 2005 году Тьепом и Залесским была получена классификация конечных квазипростых вещественных групп [114]. В частности, описаны все конечные простые вещественные группы. Таким образом, для решения вопроса 14.82 достаточно выяснить какие из конечных простых вещественных групп являются строго вещественными. Вопрос о строгой вещественности знакопеременных групп решен в работе Багински [115]. Спорадические строго вещественные группы описаны в работе Нужина и

Колесникова [116]. В работе Эллерса и Нольте [117] и двух работах Гау [118],[119] доказано, что симплектические группы являются строго вещественными тогда и только тогда, когда порядок поля сравним с 3 по модулю 4. В работе [120] доказана строгая вещественность групп ортогональных групп размерности 4n при четной характеристике поля. В случае нечетной характеристике поля из работы Томсена и Кнуппеля [121] можно понять, что строго вещественными являются ортогональные группы нечетной размерности при характеристике поля сравнимой с 1 по модулю 4. В работе Вдовина и Гальта [122] завершается описание конечных простых строго вещественных групп.

Присутствовали:
проф., д.ф.-м.н. И. П. Шестаков, проф., д.ф.-м.н., чл.-корр. РАН В. Д. Мазуров, проф., д.ф.-м.н. Романовский Н. С., проф., д.ф.-м.н. Бардаков В. Г., д.ф.-м.н. Васильев А. В., д.ф.-м.н. Вдовин Е. П., д.ф.-м.н. Желябин В. Н., д.ф.-м.н. Пожидаев А. П., к.ф-.м.н. Кайгородов И. Б., к.ф-.м.н. Гончаров М. Е., Воронин В. Ю., Губарев В. Ю., Попов А. А., Руденко А.С., Захаров А.С, Р. И. Басыров , Т. И. Шабалин, Е. М. Охапкина, Ю. С. Попов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе исполнения 3 этапа «Проведение исследований» получены следующие результаты:

исследована возможность представления жестких разрешимых групп через определяющие соотношения;

описаны δ-дифференцирования полупростых структуризумых алгебр;

описаны (n+1)-дифференцирования полупростых алгебр Филиппова и простой тернарной алгебры Мальцева M_8;

описаны дифференциально простые йордановы алгебры;

найдены тождества тернарной алгебры кватернионов;

построен пример новой простой йордановой супералгебры над полем не являющимся алгебраически замкнутым;

доказана лемма о композиции для алгебр Ли над коммутативным кольцом; построен ряд новых примеров неспециальных алгебр Ли;

доказана в общем случае двойственность в смысле Кожуля для категорий ди-(три-)алгебр и дендриформных алгебр;

разработан вычислительный алгоритм нахождения белого произведения Манина для бинарных квадратичных операд;

классифицированы градуированные простые ассоциативные конформные алгебры конечного типа.

Выполненные на 3 этапе работы соответствуют требованиям технического задания, календарного плана и нормативной документации.

Приведены списки опубликованных работ, выступлений на научных форумах, а также другие показатели успешной работы в рамках данного проекта.

Полученные результаты имеют мировой уровень, а исполнители представляют передовой фронт науки в указанных областях.

По результатам НИР напрашивается вывод о полном выполнении календарного плана работ.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Herstein I., Jordan derivations of prime rings, Proc. Amer. Math. Soc., 8, 1957, 1104-1110.

2. Cusack J. M., Jordan derivations on rings. Proc. Amer. Math. Soc. 53 (1975), no. 2, 321–324.

3. Brešar M.; Vukman, J., Jordan derivations on prime rings. Bull. Austral. Math. Soc. 37 (1988), no. 3, 321–322.

4. Brešar M., Jordan derivations on semiprime rings. Proc. Amer. Math. Soc. 104 (1988), no. 4, 1003–1006.

5. Martindale, W. S. III, Lie derivations of primitive rings. Michigan Math. J. 11 1964 183–187.

6. Killam E., Lie derivations on skew elements in prime rings with involution. Canad. Math. Bull. 30 (1987), no. 3, 344–350

7. Beidar, K. I.; Chebotar, M. A. On Lie derivations of Lie ideals of prime algebras. Israel J. Math. 123 (2001), 131–148.

8. Burde D., Lie algebra prederivations and strongly nilpotent Lie algebras. Comm. Algebra 30 (2002), no. 7, 3157–3175

9. Bajo I., Prederivations of Lie algebras and isometries of bi-invariant Lie groups. Geom. Dedicata 66 (1997), no. 3, 281–291.

10. Bajo I., Lie algebras admitting non-singular prederivations. Indag. Math. (N.S.) 8 (1997), no. 4, 433–437

11. Hochschild, G. Semi-simple algebras and generalized derivations. Amer. J. Math. 64, (1942). 677–694

12. Vinberg È. B., Generalized derivations of algebras. Algebra and analysis (Irkutsk, 1989), 185–188, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 163, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995

13. Hvala B., Generalized derivations in rings. Comm. Algebra 26 (1998), no. 4, 1147–1166.

14. Lee T-K., Generalized derivations of left faithful rings. Comm. Algebra 27 (1999), no. 8, 4057–4073.

15. Jacobson N., Lie algebras. Republication of the 1962 original. Dover Publications, Inc., New York, 1979. ix+331 pp.

16. Hopkins N. C. Generalized derivations of nonassociative algebras. Nova J. Math. Game Theory Algebra 5 (1996), no. 3, 215–224.

17. Brown R.; Hopkins N. C., Noncommutative matrix Jordan algebras. Trans. Amer. Math. Soc. 333 (1992), no. 1, 137–155

18. Filippov V. T., On Lie algebras that satisfy an identity of degree 5, Algebra i Logika 34 (1995), no. 6, 681--705, 729—730

19. Филиппов В. Т.., О δ-дифференцированиях первичных альтернативных и мальцевских алгебр, Алгебра и логика, 39:5 (2000), 618–625.

20. Филиппов В. Т., δ-Дифференцирования первичных алгебр Ли, Сиб. матем. Журн., 40:1 (1999), 201–213

21. Филиппов В. Т., О δ-дифференцированиях алгебр Ли, Сиб. матем. Журн., 39:6 (1998), 1409–1422

22. Кайгородов И. Б., О δ-дифференцированиях простых конечномерных йордановых супералгебр, Алгебра и логика, 46:5 (2007), 585–605

23. Кайгородов И. Б., О δ-дифференцированиях классических супералгебр Ли, Сиб. матем. Журн., 50:3 (2009), 547–565

24. Кайгородов И. Б., О δ-супердифференцированиях простых конечномерных йордановых и лиевых супералгебр, Алгебра и логика, 49:2 (2010), 195–215

25. Желябин В. Н., Кайгородов И. Б., О δ-супердифференцированиях простых супералгебр йордановых скобок, Алгебра и анализ, 23:4 (2011), 40–58

26. Кайгородов И. Б., О δ-супердифференцированиях полупростых конечномерных йордановых супералгебр, Мат. Заметки, 91, 2012, принято к печати, arXiv: 1106.2680

27. B.N. Allison, A class of nonassociative algebras with involution containing the class of Jordan algebras, Math. Ann. 237 (2) (1978) 133–156.

28. Pozhidaev A. P., Shestakov I. P., Structurable superalgebras of Cartan type. J. Algebra 323 (2010), no. 12, 3230–3251.

29. Faulkner J., Structurable superalgebras of classical type. Comm. Algebra 38 (2010), no. 9, 3268–3310.

30. Faulkner J., Construction of structurable superalgebras of Cartan type. Comm. Algebra 38 (2010), no. 12, 4476–4488

31. Smirnov O.N., An example of a simple structurable algebra, Algebra Logic 29 (4) (1990) 331–336.

32. Smirnov O.N., Simple and semisimple structurable algebras, Algebra Logic 29 (5) (1990) 377–394

33. Schafer, R. D. On structurable algebras. J. Algebra 92 (1985), no. 2, 400–412.

34. Kaygorodov I., Generalized δ-Derivations, http://arxiv.org/abs/1107.4420

35. Leger G., Luks E., Generalized derivations of Lie Algebras, J. of Algebra, 228 (2000), 165–203.

36. Zhang R., Zhang Y., Generalized derivations of Lie superalgebras, Comm. Algebra, 38 (2010),№10, 3737–3751

37. Komatsu H., Nakajima A., Generalized derivations of associative algebras, Quaest. Math.,26 (2003), №2, 213–235.

38. Komatsu H., Nakajima A., Generalized derivations with invertible values, Comm. Algebra, 32 (2004), №5, 1937–1944.

39. Bergen, J.; Herstein, I.N.; Lanski, C. Derivations with Invertible Values.Canad. J. Math. 1983, 35, 300–310.

40. Jimenez-Gestal C., Perez-Izquierdo J. M., Ternary derivations of generalized Cayley-Dicksonalgebras, Comm. Algebra, 31 (2003), №10, 5071–5094.

41. Jimenez-Gestal C., Perez-Izquierdo J. M., Ternary derivations of finite-dimensional realdivision algebras, Linear Algebra Appl., 428 (2008), №8-9, 2192–2219.

42. Perez-Izquierdo J. M., Unital algebras, ternary derivations, and local triality, Algebras,representations and applications, 205–220, Contemp. Math., 483, Amer. Math. Soc.,Providence, RI, 2009.

43. Филиппов В. Т., n-Лиевы алгебры, Сиб. мат. ж., 26 (1985), №6, 126–

140.

44. Nambu Y., Generalized Hamiltonian mechanics, Phys. Rev. D 7 (1973), 2405–2412.

45. Azcarraga J. A., Izquierdo J. M., n-Ary algebras: a review with applications,J.Phys.A43:293001, 2010. [http://arxiv.org/abs/1005.1028]

46. Myasnikov A., Romanovskiy N., Krull dimension of solvable groups, J.Algebra, 324 (10), 2010, pp. 2814-2831

47. Романовский Н.С., Нетеровость по уравнениям жестких разрешимых групп, Алгебра и логика, 48, N 2 (2009), 258-279)

48. Н.С.Романовский, Делимые жесткие группы, Алгебра и логика, 47, N 6 (2008), 762-776

49. Романовский Н.С., Неприводимые алгебраические множества над делимыми распавшимися жесткими группами, Алгебра и логика, 48, N 6 (2009), 793-818

50. Романовский Н.С., Копроизведения жестких групп, Алгебра и логика, 49, N 6 (2010), 803-818

51. Chapuis O., Universal theory of certain solvable groups and bounded Ore group rings, J.Algebra, 176 (1995), 368-391

52. Zassenhaus H., Über Lie'sche Ringe mit Primzahlcharakteristik, Abh. math. Sem. Hansische Univ., 13, 1939, 1-100.

53. Albert A.A., On commutative power-associative algebras of degree two, Trans. Am. Math. Soc., 74, 1953, 323-343.

54. Posner E.C., Differentiable simple rings, Proc. Am. Math. Soc., 11, №3, 1960, 337-343.

55. Harper L.R., On differentiably simple algebras, Trans. Am. Math. Soc., 100, №1, 1961, 63-72.

56. Block R.E., Determination of the differentiably simple rings with a minimal ideal, Ann. of Math., 90, 1969, 433-459.

57. Yuan S., Differentiably simple rings of prime characteristic, Duke Math. J., 31, 1964, 623-630.

58. Cheng S. J., Differentiably simple Lie superalgebras and representations of semisimple Lie superalgebras, J. Algebra, 173, №.1, 1995, 1-43.

59. Artemovich O.D., Differentiably simpe rings: survey, Matematychni Studii, 23, 2005, 115-128.

60. Попов А.А., Дифференциально простые альтернативные алгебры, Алгебра и логика, 49, № 5, 2010, 670-689.

61. Jacobson N., Structure and Representations of Jordan Algebras, AMS Colloquium Publications, 39, 1968.

62. Жевлаков К.А., Слинько А.М., Шестаков И.П., Ширшов А.И., Кольца, близкие к ассоциативным, М.: Наука, 1978

63. Ширшов А.И. Некоторые алгоритмические проблемы для алгебр Ли, Сиб. мат. журн., 3 (2), 1962, 292-296.

64. Hironaka Y. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field if characteristic zero, I, II, Ann. of Math. 79, 1964, 109-203, 205-326.

65. Buchberger B. An algorithmical criteria for the solvability of algebraic systems of equations, Aequationes Math. 4, 1970, 374-383.

66. Mikhalev A.A. The junction lemma and the equality problem for color Lie superalgebras, Moscow Univ. Math. Bull. 44, 1989, 87-90.

67. Mikhalev A.A. The composition lemma for color Lie superalgebras and for Lie p-superalgebras, Contemp. Math. 131 (2), 1992, 91-104.

68. Bokut L.A., Fong Y., Ke W.-F. Composition-Diamond lemma for associative conformal algebras, J. Algebra 272, 2004, 739-774.

69. Kang S.-J., Lee K.-H. Gröbner–Shirshov bases for irreducible sln-modules, J. Algebra 232, 2000, 1-20.

70. Чибриков Е.С. О сободных конформных алгебрах Ли, Вестник НГУ, 4 (1), 2004, 65-83.

71. Bokut L.A., Chen Y., Li Yu. Gröbner–Shirshov bases for Vinberg–Koszul–Gerstenhaber right-symmetric algebras, J. Math. Sci. 166, 2010, 603-612.

72. Bokut L.A., Chen Y., Liu Cihua. Gröbner–Shirshov bases for dialgebras, Internat. J. Algebra Comput. 20 (3), 2010, 391-415.

73. Bokut L.A., Chen Yuqun, Qiu Jianjun. Gröbner–Shirshov bases for associative algebras with multiple operators and free Rota-Baxter algebras, J. Pure Appl. Algebra 214, 2010, 89-100.

74. Bokut L.A., Chen Y., Deng Xueming. Gröbner–Shirshov bases for Rota–Baxter algebras, Sib. Math. J. 51 (6), 2010, 978-988.

75. Ширшов А.И. О свободных кольцах Ли, Мат. сборник, 45, 1958, 113-122.

76. Cartier P. Remarques sur le theoreme de Birkhoff-Witt, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Ser. III XII, 1958, 1–4.

77. Cohn P.M. A remark on the Birkhoff-Witt theorem, J. London Math. Soc. 38, 1963, 197-203.

78. Priddy S. Koszul resolutions, Trans. Amer. Math. Soc. 152, 1970, 39-60.

79. Manin Y.I. Some remarks on Koszul algebras and quantum groups, Ann. Inst. Fourier, 37, 1987, 191-205.

80. Polishchuk A., Positselski L. Quadratic algebras, Univ. Lect. Ser. 37, American Mathematical Society, 2006.

81. Ginzburg V., Kapranov M. Koszul duality for operads. Duke Math. J., 76, 1994, 203-272.

82. Kontsevich M. Formal (non)commutative symplectic geometry. The Gelʹfand Mathematical Seminars, 1990-1992, 173-187, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1993.

83. Kontsevich M. Feynman diagrams and low-dimensional topology. First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992), 97-121.

84. May J.P. Definitions: operads, algebras and modules. Operads: Proceedings of Renaissance Conferences (Hartford, CT/Luminy, 1995), 1–7, Contemp. Math., 202, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

85. Loday J.-L. Dialgebras, in Dialgebras and related operads, Lecture Notes in Math. 1763, 2002, 7-66.

86. Ebrahimi-Fard K., Guo L. On products and duality of binary, quadratic, regular operads, J. Pure. Appl. Algebra, 200, 2005, 293-317.

87. Loday J.-L., Ronco M. Trialgebras and families of polytopes, in “Homotopy Theory: Relations with Algebraic Geometry, Group Cohomology, and Algebraic K-theory”, Comtep. Math. 346, 2004, 369-398.

88. Loday J.-L. Completing the operadic butterfly, Georgian Math. J. 13, 2006, 741-749.

89. Kolesnikov P. Varieties of dialgebras and conformal algebras, Sib. Mat. Zh. 49, 2008, no. 2, 323-340.

90. Chapoton F. Un endofoncteur de la categorie des operades, Dialgebras and related operads. Springer-Verl., Berlin, 2001, pp.105--110. (Lectures Notes in Math., vol. 1763).

91. Zinbiel G. W. Encyclopedia of types of algebras 2010, preprint available at http://arxiv.org/abs/1101.0267.

92. Loday J.-L. Some problems in operad theory, preprint, arXiv:1109.3290.

93. Nastasescu, C.; Van Oystaeyen, F. Graded ring theory. North-Holland Mathematical Library, 28, North-Holland Publishing Co., 1982.

94. Bahturin Y., Shestakov I., Zaicev M. Gradings on simple Jordan and Lie algebras. J. Algebra, 283, 2005, no. 2, 849-868.

95. Bahturin Y., Kochetov M. Classification of group gradings on simple Lie algebras of types A, B, C and D. J. Algebra 324, 2010, 2971-2989.

96. Bahturin Y., Kochetov M., Montgomery S. Group gradings on simple Lie algebras in positive characteristic. Proc. Amer. Math. Soc., 137, 2009, no. 4, 1245-1254.

97. Kac V.G. Vertex algebras for beginners, second ed., University Lecture Series 10, AMS, Providence, RI, 1998.

98. Bakalov B., D'Andrea A., Kac V.G. Theory of finite pseudoalgebras, Adv. Math. 162, 2001, no.1, 1-140.

99. Kolesnikov P. On irreducible algebras of conformal endomorphisms over a linear algebraic group. Journal of Mathematical Sciences 161 (1), 2009, 41-56.

100. D'Andrea A., Kac V.G. Structure theory of finite conformal algebras, Sel. Math., New Ser. 4, 1998, 377-418.

101. Дринфельд В.Г., Гамильтоновы структуры на группах Ли, биалгебры Ли и геометрический смысл классических уравнений Янга-Бакстера, ДАН СССР, 268, N 2, 1983, 285—287.

102. Белавин А.А., Дринфельд В.Г., О решениях классического уравнения Янга–Бакстера для простых алгебр Ли // Функц. анализ и его прил., 16, 3 (1982), 1–29.

103. Some remarks on Lie bialgebra structures on simple complex Lie algebras // Comm. in Algebra, 27, 9 (1999) 4289-4302.

104. Michaelis W., Lie coalgebras // Adv. Math., 38 (1980), 1–54.

105. Желябин В. Н., Йордановы биалгебры и их связь с биалгебрами Ли // Алгебра и логика 1, 36 (1997), 3-25.

106. Желябин В. Н., Йордановы биалгебры симметрических элементов и биалгебры Ли // Сибирский математический журнал, 39, 2 (1998), 299-308.

107. Aguiar M., On the associative analog of Lie bialgebras // Journal of algebra, 244 (2001), 492—532.

108. Желябин В.Н., Об одном классе йордановых Д-биалгебр // Алгебра и анализ 11, 4 (1999), 64-94.

109. Гончаров М.Е., Классическое уравнение Янга~--- Бакстера на альтернативных алгебрах. Структура альтернативной Д-биалгебры на матричной алгебре Кэли – Диксона // Сиб. мат. журн., 48, 5 (2007) 1009-1025.

110. V.V. Vershinin, On Poisson-Malcev Structures // Acta Applicandae Mathematicae, 75(2003) 281-292

111. Желябин В.Н. Дуальные коалгебры йордановых биалгебр и суперaлгебр, Сибирский математический журнал, 46, 6 (2005) 1302-1315.

112. Sweedler M. E. Hopf algebras, New York: W.A. Benjamin Inc., 1969.

113. Anquela J.A., Cortes T., Montaner F., Nonassociative Coalgebras, Communications in Algebra, 22:12 (1994) 4693—4716.

114. P.H.Tiep, A.E. Zalesski, Ubipotent elements of finite groups of Lie type and realization fields of their complex representations, J. Algebra, 2004, V.271, N1, p.327-390.

115. C. Baginski, On sets of elements of the same order in the alternating group A_n, Publ. Math. 1987, V. 34, N 1, p. 13-15, (1987).

116. S.G. Kolesnikov, Ja.N. Nuzhin, On strong reality of finite simple groups, Acta Appl. Math., 2005, V. 85, N 1-3, p.195-203.

117. E.W. Ellers, W. Nolte, Bireflectionality of orthogonal and symplectic groups, Arch. Math., V. 39 (1982), N 1, p. 113-118.

118. R. Gow, Commutators in the symplectic group, Arch. Math. (Basel), 1988, V. 50, N 3, p. 204-209.

119. R. Gow, Products of two involutions in classical groups of characteristic 2, J. Algebra, V. 71 (1981), N 2, p. 583-591.

120. J. Ramo, Strongly real elements of orthogonal groups in even characteristic.

121. F. Knuppel, G. Thomsen, Involutions and commutators in orthogonal groups, J. Austral. Math. Soc., 1998, V. 65, N 1, p. 1-36.

122. Вдовин Е. П., Гальт А. А. Строгая вещественность конечных простых групп // СМЖ. 2010. Т.51. №4.С.769-777.

Приложение А
Список защищенных диссертаций

№	Ф.И.О.	Искомая степень	Дата защиты	Шифр спец-ти, совет	Тема
1	Пожидаев Александр Петрович	д.ф.-м.н.	17.06.10	01.01.06, Д 003.015.02	Алгебраические системы лиева типа
2	Гончаров Максим Евгеньевич	к.ф.-м.н.	16.09.10	01.01.06, Д 003.015.02	Биалгебры, заданные на простых альтернативных и мальцевских алгебрах
3	Кайгородов Иван Борисович	к.ф.-м.н.	16.09.10	01.01.06, Д 003.015.02	δ-дифференцирования простых лиевых и йордановых супералгебр

Приложение Б

Список публикаций исполнителей

Опубликованные статьи за период выполнения НИР:

1. Кайгородов И.Б., О δ-супердифференцированиях простых конечномерных йордановых и лиевых супералгебр // Алгебра и Логика, 49 (2010), № 2, 195-215.

   Импакт-Фактор : 0,479.

   (см. http://www.physchem.chimfak.rsu.ru/General/if-2009rus.html)

2. Кайгородов И. Б. Об обобщенном дубле Кантора // Вестник Самарского государственного университета, 78, N4 (2010), 42-50.

3. Желябин В. Н., Кайгородов И. Б., О δ-супердифференцированиях простых супералгебр йордановых скобок // Алгебра и анализ, 23, N 4 (2011), 40-58.

4. Гончаров М.Е., Биалгебры Ли, возникающие из альтернативных и йордановых биалгебр // Сиб. мат. ж., 51, 2010, № 2, 268-284

   Импакт-Фактор : 0.475

   (см. http://www.physchem.chimfak.rsu.ru/General/if-2009rus.html)

5. Гончаров М. Е. Дуальные коалгебры альтернативных и ассоциативных биалгебр // Сибирские электронные мат. известия, 8 (2011), 213-218.

6. Васильев А.В., Гречкосеева М.А., Мазуров В. Д., Распознаваемость конечных простых групп по спектру и порядку // Доклады АН, 2010, т. 431, № 3, 295-297.

   Импакт-Фактор :0.162

   (см. http://www.physchem.chimfak.rsu.ru/General/if-2009rus.html)

7. Васильев А.В., Гречкосеева М.А., Старолетов А.М. О конечных группах, изоспектральных простым линейным и унитарным группам // Сиб. мат. журн. Т. 52, № 1. С. 39-53.

   Импакт-Фактор :0 .475

   (см. http://www.physchem.chimfak.rsu.ru/General/files/Impact-factor2009.zip)

8. Лыткина Д.В., Мазуров В.Д., О периодических группах, порождённых

парой почти квадратичных автоморфизмов абелевой группы // Сибирск. матем. Журн., 51, № 3 (2010), 599-603.

Импакт-Фактор:0.475

(см. http://www.physchem.chimfak.rsu.ru/General/if-2009rus.html)

9. Shen R., Shao Ch., Jiang Q., Shi W., Mazurov V., A new characterization of A5 // Monatsh. Math. 160 (2010), 337-341.

Импакт-Фактор: 0,764

(см. http://www.physchem.chimfak.rsu.ru/General/if-2009rus.html)

10. Вдовин Е.П., Ревин Д.О., Критерий сопряженности холловых подгрупп в конечных группах // Сиб. матем. ж. т. 51 (2010), N 3, с. 506-516. 0.475

Импакт-Фактор:0.475

(см. http://www.physchem.chimfak.rsu.ru/General/if-2009rus.html)

11. Вдовин Е.П., Гальт А.А., Строгая вещественность конечных простых групп // Сибирский математический журнал, т. 51 (2010), No 4, 769—777.

Импакт-Фактор:0.475

(см. http://www.physchem.chimfak.rsu.ru/General/if-2009rus.html)

12. Вдовин Е.П., Манзаева Н.Ч., Ревин Д.О., О наследуемости свойства $D_{\backslash pi}$ подгруппами, Труды ИММ, 17 (2011), № 4, 44-52.

Импакт-Фактор:0.172

(см. http://www.physchem.chimfak.rsu.ru/General/if-2009rus.html)

13. Губарев В. Ю., Оподпространстве L((x1^...^xk)m) в Sm(^kRn) // Алгебра и Логика 49, №4 (2010), с. 451-478

Импакт-Фактор : 0,479.

(см. http://www.physchem.chimfak.rsu.ru/General/if-2009rus.html)

14. Gubarev V. Yu, Kolesnikov P.S, The Tits-Kantor-Koecher Construction for Jordan Dialgebras // Communications in Algebra. V. 39, № 2. P. 497— 520. Импакт-Фактор :0 .44

(см. http://www.physchem.chimfak.rsu.ru/General/files/Impact-factor2009.zip)

15. Пожидаев А.П., Шестаков И.П., Некоммутативные йордановы супералгебры степени n≥2 // ДАН 431, 2 (2010), 165-169.

Импакт-Фактор : 0.162

(см. http://www.physchem.chimfak.rsu.ru/General/if-2009rus.html)

16. Пожидаев А.П., Шестаков И.П., Некоммутативные йордановы супералгебры степени $n\geq 2$ // Алгебра и Логика 49, 1 (2010), 26-59.

Импакт-Фактор : 0,479

(см. http://www.physchem.chimfak.rsu.ru/General/if-2009rus.html)

17. Pozhidaev A.P., Shestakov I.P., Structurable superalgebras of Cartan type // J. of Alg. 323, 12 (2010) 3230-3251.

Импакт-Фактор : 0,632

(см. http://www.physchem.chimfak.rsu.ru/General/if-2009rus.html)

18. Пожидаев А.П., Шестаков И.П., Структуризуемые супералгебры картановского типа // ДАН 432, 2, (2010) 167-173.

Импакт-Фактор : 0.162

(см. http://www.physchem.chimfak.rsu.ru/General/if-2009rus.html)

19. Beites P.D., Nicolas A.P., Pozhidaev A.P., Saraiva P., On a ternary quaternion algebra, Comm. in Alg. 39, (2011) 830—842.

Импакт-Фактор :0 .44

(см. http://www.physchem.chimfak.rsu.ru/General/files/Impact-factor2009.zip)

20. Myasnikov A., Romanovskiy N., Krull dimension of solvable groups // J. Algebra, v. 324, N 10, 2010, 2814-2831.

Импакт-Фактор : 0,632

(см. http://www.physchem.chimfak.rsu.ru/General/if-2009rus.html)

21. Романовский Н.С., Копроизведения жестких групп // Алгебра и логика, 49, N 6 (2010), 803-818.

Импакт-Фактор :0,479.

(см. http://www.physchem.chimfak.rsu.ru/General/if-2009rus.html)

22. Мясников А. Г., Романовский Н.С., Об универсальных теориях жестких разрешимых групп// Алгебра и логика, 50, N 6 (2010), 811-831.

Импакт-Фактор :0,479.

(см. http://www.physchem.chimfak.rsu.ru/General/if-2009rus.html)

23. Попов А. А., Дифференциально простые альтернативные алгебры // Алгебра и логика,49:5 (2010), 670–689

Импакт-Фактор :0,479.

(см. http://www.physchem.chimfak.rsu.ru/General/if-2009rus.html)

24. Bokut L.A., Chen Y., Liu C., Grobner-Shirshov bases for dialgebras // Int. J. of Algebra and Comp., 20, 3, 2010, 391-415.

Импакт-Фактор :0,483

(см. http://www.physchem.chimfak.rsu.ru/General/if-2009rus.html)

25. Bokut L.A., Chen Y., Chen Y., Composition-Diamond lemma for tensor product of free algebras // J. Algebra, 323, 2010, 2520-2537.

Импакт-Фактор :0,632

(см. http://www.physchem.chimfak.rsu.ru/General/if-2009rus.html)

26. Bokut L.A., Chen Y., Qui J., Grobner-Shirshov for associative algebras with multiple operators and free Rota-Baxter algebras // J. of Pure and Appl. Algebra, 214, 2010, 89-100.

Импакт-Фактор : 0,6

(см. http://www.physchem.chimfak.rsu.ru/General/if-2009rus.html)

27. Bokut L.A., Chen Y., Li Yu, Grobner-Shirshov for Vinberg-Koszul-Gerstenhaber right-symmetric algebras // J. of Math. Sciences, 166, 5, 2010, 603-612.

Импакт-Фактор :0,172

(см. http://www.physchem.chimfak.rsu.ru/General/if-2009rus.html)

28. Bokut L. A., Chen Y., Chen Y., Grobner-Shirshov bases for Lie algebras over a commutative algebras // J. Algebra, 337 (2011), 82-102.

Импакт-Фактор :0,632

(см. http://www.physchem.chimfak.rsu.ru/General/if-2009rus.html)

29. Ревин Д. О., О π-теоремах Бэра-Судзуки // Сиб. матем. Журн., 52:2 (2011), 430–439

Импакт-Фактор :0 .475

(см. http://www.physchem.chimfak.rsu.ru/General/files/Impact-factor2009.zip)

30. Revin D.O., Vdovin E.P., An existence criterion for Hall subgroups of finite groups, J. Group Theory 14:1 (2011), 93-101

Импакт-Фактор :0 .471

(см. http://www.physchem.chimfak.rsu.ru/General/files/Impact-factor2009.zip)

31. Revin D.O., Vdovin E.P., Generalization of the Sylow theorem, London Mathematical Society Lecture notes series, No 388, vol 2, Groups St Andrews 2009 in Bath, 488-520.

32. Kolesnikov P.S., On finite representations of conformal algebras // J. Algebra, 331 (2011), 169-193.

Импакт-Фактор :0,632

(см. http://www.physchem.chimfak.rsu.ru/General/if-2009rus.html)

33. Bardakov V.G., Bellingeri P., On representations of Artin-Tits and surface braid groups, J. Group Theory, 14 (2011), 1, 143-163.

Импакт-Фактор :0 .471

(см. http://www.physchem.chimfak.rsu.ru/General/files/Impact-factor2009.zip)

Статьи, сданные в печать за период выполнения НИР:

1. Е.П.Вдовин, Д.О.Ревин, Теоремы силовского типа // Успехи мат.наук
2. Е.П.Вдовин, Д.О.Ревин, Л.А.Шеметков, Формации конечных (C-pi)-групп // Алгебра и анализ.
3. Кайгородов И. Б., Об обобщенных δ-дифференцированиях // Сиб. Мат. ж.
4. Кайгородов И. Б., О δ-супердифференцированиях полупростых конечномерных йордановых супералгебр // Математические заметки.
5. Кайгородов И. Б., О δ-дифференцированиях n-арных алгебр // Известия РАН. Серия Математическая
6. Voronin V., Special and exceptional Jordan dialgebras // Journal of Algebra and its Applications.
7. Goncharov M. E., Structures of Malcev Bialgebras on a simple non-Lie Malcev algebra. // Communications in Algebra.
8. Желябин В. Н., Новые примеры простых йордановых супералгебр над произвольным полем характеристики ноль // Алгебра и анализ.
9. Желябин В. Н., Йордановы супералгебры векторного типа // Сиб. мат. ж.
10. Е.П.Вдовин, Д.О.Ревин, Пронормальность холловых подгрупп в конечных простых группах, Сибирский математический журнал.
11. Е.П.Вдовин, Д.О.Ревин, О пронормальности холловых подгрупп, Сибирский математический журнал.

Приложение В

Список сделанных исполнителями докладов

<u>На всероссийских конференциях и семинарах за период выполнения НИР:</u>

1. Кайгородов И.Б. О δ-дифференцирования алгебр и супералгебр // Проблемы теоретической и прикладной математики, 41-ая Всероссийская молодежная школа-конференция 1-5 февраля 2010 г., Екатеринбург (секционный доклад).
2. Кайгородов И.Б. Об обобщенном дубле Кантора // 42-я Всероссийской молодежной школы-конференции "Современные проблемы математики", Екатеринбург, 30 января-6 февраля 2011 г. (секционный доклад).
3. Гончаров М.Е. О решениях йорданова аналога классического уравнения Янга-Бакстера на алгебре Алберта // Проблемы теоретической и прикладной математики, 41-ая Всероссийская молодежная школа-конференция 1-5 февраля 2010 г., Екатеринбург (секционный доклад).
4. Мазуров В. Д. Классификация конечных группа // Проблемы теоретической и прикладной математики, 41-ая Всероссийская молодежная школа-конференция 1-5 февраля 2010 г., Екатеринбург (курс из трех лекций).
5. Мазуров В. Д. Нерешенные задачи теории групп // 42-я Всероссийской молодежной школы-конференции "Современные проблемы математики", Екатеринбург, 30 января-6 февраля 2011 г. (пленарный доклад).
6. Воронин В. Ю. Специальные тождества для диалгебр // 42-я Всероссийской молодежной школы-конференции "Современные проблемы математики", Екатеринбург, 30 января-6 февраля 2011 г. (секционный доклад).
7. Губарев В.Ю., Симметрическая степень многообразия Грассмана // Вторая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» Москва, 2011г. 31 января-5 февраля 2011.

На международных конференциях и семинарах за период выполнения НИР:

1. Кайгородов И. Б., Желябин В. Н. О δ-супердифференцированиях простых супералгебр йордановых скобок // Международная конференция «Мальцевские чтения», Новосибирск, 2-6 мая 2010 г. (секционный доклад)
2. Кайгородов И.Б., Желябин В.Н. О δ-супердифференцированиях простых супералгебр йордановых скобок // Международная конференция, посвященной 70-летию А. Яковлева., 19-24 июня 2010г., Санкт-Петербург (секционный доклад)
3. Кайгородов И.Б. О δ-супердифференцированиях полупростых йордановых супералгебр // Международная алгебраическая конференция Алгебра, логика и ее приложения, Красноярск, Сибирский Федеральный университет, 19 – 25 июня 2010 г. (секционный доклад)
4. Кайгородов И. Б. δ-superderivation of algebras and superarlgebras // International Conference on Algebra 2010, 7-10 Октября, Джокиакарта, Индонезия. Международная конференция (пленарный доклад).
5. Кайгородов И. Б. Обобщенные дифференцирования алгебраических структур// Международная конференция по теории колец, посвященная 90-летию А. И. Ширшова (1921-1981) 14-18 июля 2011 г., г. Новосибирск, Россия (секционный доклад).
6. Кайгородов И. Б., Об обобщенных дифференцированиях алгебр // Международная конференция «Алгебра и логика» (Казань, 25-30 сентября 2011 г.). Секционный доклад.
7. Желябин В. Н. Дуальные коалгебры йордановых биалгебр // Международная алгебраическая конференция Алгебра, логика и ее приложения, Красноярск, Сибирский Федеральный университет, 19 – 25 июня 2010 г. (пленарный доклад).
8. Желябин В. Н. Универсальные обертывающие алгебр Мальцева. Пунктированые биалгебры Муфанг // Международная конференция «Мальцевские чтения», Новосибирск, 2-6 мая 2010 (секционный доклад).

9. Желябин В. Н. Неассоциативные биалгебры // Международная конференция по теории колец, посвященная 90-летию А. И. Ширшова (1921-1981) 14-18 июля 2011 г., г. Новосибирск, Россия (пленарный доклад).
10. Желябин В. Н. New Examples of Simple Jordan Superalgebras over an Arbitrary Field of Characteristic Zero // Международная конференция по теории колец, посвященная 90-летию А. И. Ширшова (1921-1981) 14-18 июля 2011 г., г. Новосибирск, Россия (секционный доклад).
11. Пожидаев А.П., sp-Алгебры и диалгебры Мальцева // Международная конференция «Мальцевские чтения», Новосибирск, 2-6 мая 2010 г. (секционный доклад).
12. Пожидаев А.П., Некоммутативные йордановы супералгебры // Международная алгебраическая конференция Алгебра, логика и ее приложения, Красноярск, Сибирский Федеральный университет, 19 – 25 июня 2010 г. (пленарный доклад).
13. Пожидаев А.П., Об алгебрах Рота-Бакстера // 9-ая Международная летняя школа "Пограничные вопросы теории моделей и универсальной алгебры" Эрлагол-2011. 22-27 июня 2011г.
14. Пожидаев А.П., Некоммутативные йордановы супералгебры. //. Международная конференция по теории колец, посвящённая 90-летию А.И.Ширшова (1921-1981). Новосибирск, 14-18 июля 2011г. Пленарный доклад.
15. Пожидаев А.П., On Rota-Baxter algebras of weight 0 // международная конференция «Алгебра и логика» (Казань, 25-30 сентября 2011 г.). Секционный доклад.
16. Бокуть Л.А. Базисы Грёбнера-Ширшова для универсальных линейных алгебр // Международная конференция, посвященной 70-летию А. Яковлева., 19-24 июня 2010г., Санкт-Петербург (пленарный доклад)
17. Бокуть Л.А. Базисы Грёбнера-Ширшова для универсальных линейных алгебр // International Conference on Algebra 2010, 7-10 Октября,

Джокиакарта, Индонезия. Международная конференция (пленарный доклад).

18. Бокуть Л.А. Базисы Грёбнера-Ширшова для универсальных линейных алгебр // Международная алгебраическая конференция Алгебра, логика и ее приложения, Красноярск, Сибирский Федеральный университет, 19 – 25 июня 2010 г. (пленарный доклад)

19. Гончаров М.Е. Структура биалгебры Мальцева, заданная на простой семимерной алгебре Мальцева // Международная конференция «Мальцевские чтения», Новосибирск, 2-6 мая 2010 (секционный доклад)

20. Гончаров М.Е. Биалгебры Мальцева // Международная конференция, посвященной 70-летию А. Яковлева., 19-24 июня 2010г., Санкт-Петербург (секционный доклад)

21. Гончаров М. Е. Structures of Malcev bialgebras on the simple non-Lie Malcev algebra. // International Conference on Algebra 2010, 7-10 Октября, Джокиакарта, Индонезия. Международная конференция (пленарный доклад).

22. Бардаков В. Г. Группы триангуляций поверхностей // Международная конференция «Мальцевские чтения», Новосибирск, 2-6 мая 2010 (секционный доклад).

23. Воронин В. Ю., Гомоморфные образы специальных йордановых диалгебр // Международная конференция "Мальцевские чтения", посвящённая 70-летию со дня рождения академика Ю.Л.Ершова, Новосибирск, 2-6 мая 2010 г. (секционный доклад).

24. Воронин В. Ю., Аналог теоремы Ширшова для диалгебр // Международная конференция «Алгебра, Логика и приложения», Красноярск, 19-25 июля 2010 г. (секционный доклад).

25. Воронин В. Ю., Special and exceptional Jordan dialgebras // International Conference on Algebra in honor of 70th birthday of Professor Shum Kar Ping, Джокьякарта (Индонезия), 7-10 октября 2010 г. (секционный доклад).

26. Воронин В. Ю. Special and exceptional Jordan dialgebras // Международная

конференция по теории колец, посвящённая 90-летию со дня рождения А. И. Ширшова, Новосибирск, 14-18 июля 2011

27. Воронин В. Ю. Теорема Макдональда для диалгебр // Международная научная конференция "Студент и научно-технический прогресс", Новосибирск, 16-20 апреля 2011

28. Ревин Д. О., A generalization of the Baer-Suzuki theorem for π-elements, Международная конференция “Мальцевские чтения”, посвященная 70-летию академика Ю.Л.Ершова, Новосибирск, 2–6 мая 2010, (секционный доклад).

29. Ревин Д. О., On a relation between the Sylow and Baer-Suzuki theorems, Межд. алгебр. конф., посв. 70-летию А.В.Яковлева, Санкт-Петербург, 19-24.06.10(секционный доклад).

30. Ревин Д. О., Theorems of Sylow type, International conference “Groups and their actions”, Będlewo (near Poznań), Poland, August 23–28 2010 (пленарный доклад).

31. Ревин Д. О. An Analogue of theBaer–Suzuki Theorem for the π–Radical of Finite Groups (пленарный доклад) // Международный семинар Finite Groups and Their Automorphisms, Стамбул (Турция), 7-11 июня 2011 год

32. Ревин Д.О. On the pronormality of Hall subgroups // The International conference on Ring Theory dedicated to the 90th anniversary of Anatolii Illarionovich Shirshov, July 14-18, 2011, Секционный доклад. 2011

33. Ревин Д. О. A characterization of the π-radical of finite groups by generations of conjugate elements // Международная конференция «Алгебра и математическая логика», посвященная 100-летию со дня рождения В.В. Морозова, г. Казань, 25–30 сентября 2011 г., секционный доклад .

34. Ревин Д. О. Конечные группы с холловыми максимальными подгруппами и их порождаемость парой сопряженных элементов // Международная конференция «Мальцевские чтения», посвященная 60-летию чл.-корр. РАН С.С.Гончарова, Новосибирск, 11-14 октября 2011 г.

35. Романовский Н. С. Универсальные теории и копроизведения жестких

групп // «Стохастические модели в биологии и предельные алгебры», Омск, международная конференция, 2-7 августа 2010 г. (пленарный доклад).

36. Романовский Н. С. Алгебраическая геометрия над жесткими группами // Equations and First-order Properties in Groups, Montreal, Canada, международная конференция в рамках тематического семестра «Geometric, Combinatorial and Computational Group Theory», 11-16 октября 2010 г. (пленарный доклад).

37. Романовский Н. С., Жесткие разрешимые группы и алгебраическая геометрия над ними // Международная конференция по теории колец, посвященная 90-летию А. И. Ширшова (1921-1981), 18 июля 2011, пленарный доклад.

38. Мазуров В. Д., Распознование групп по спектру: нерешенные вопросы // Международная школа-конференция по теории групп. Нальчик, 4-10 июля 2010 г. (пленарный доклад).

39. Мазуров В. Д., Нерешенные задачи теории групп // Международная конференция“The first biennial international group theory conference 2011”, Малайзия, 14-18 февраля 2011 г.

40. Мазуров В. Д., Группы с заданными свойствами конечных подгрупп // Международная конференция по алгебре и геометрии (Екатеринбург, 22-27 августа 2011 г.). Пленарный доклад.

41. Мазуров В. Д., Распознавание периодических групп по спектру // международная конференция «Алгебра и логика» (Казань, 25-30 сентября 2011 г.). Пленарный доклад.

42. Губарев В. Ю., Простые ассоциативные Z-конформные алгебры конечного типа // Международная научная конференция "Студент и научно-технический прогресс", Новосибирск, 16-20 апреля 2011

43. Губарев В. Ю., Простые ассоциативные Z-конформные алгебры конечного типа // 9-ая Международная летняя школа "Пограничные вопросы теории моделей и универсальной алгебры" Эрлагол-2011. 22-27 июня 2011г. Секционный доклад.

44. Губарев В. Ю., Simple associative Z-conformal algebras of finite type // Международная конференция по теории колец, посвящённая 90-летию А.И.Ширшова (1921-1981). Новосибирск, 14-18 июля 2011г. Секционный доклад.
45. Губарев В. Ю., On embedding of dendriform algebras into Rota-Baxter algebras, Международная конференция ``Мальцевские чтения''. Новосибирск, 11-14 октября 2011. Секционный доклад
46. Губарев В. Ю., On embedding of dendriform algebras into Rota-Baxter algebras, VI International Conference on non associative algebra and its applications. A conference in Honor of the 60th birthday of Santos González Zaragoza, November 1-5, 2011. Секционный доклад.